

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Санкт-Петербургский  
государственный университет аэрокосмического приборостроения

---

С. В. Богословский, А. Д. Дорофеев

ДИНАМИКА ПОЛЕТА  
ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Учебное пособие

Санкт-Петербург  
2002

УДК 629.7.01(075)

ББК68.53

Б74

**Богословский С. В., Дорофеев А. Д.**

Б74 Динамика полета летательных аппаратов: Учеб. пособие / СПбГУАП.  
СПб., 2002. 64 с.: ил.

Содержит материалы по математическому моделированию в курсе “Динамика полета”, а также описание методов анализа устойчивости и управляемости летательных аппаратов.

Предназначено для студентов всех специальностей и форм обучения.

Рецензенты:

кафедра аэродинамики и динамики полета АГА;  
кандидат технических наук *В. А. Бородавкин*

Утверждено

редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного пособия

© Санкт-Петербургский  
государственный университет  
аэрокосмического приборостроения, 2002

© С. В. Богословский, А. Д. Дорофеев,  
2002

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В динамике полета изучается движение летательного аппарата (ЛА) под действием сил инерции и сил тяги, а также внешних сил и моментов, т. е. связь между силами, моментами и кинематическими параметрами движения: скоростью, ускорением, угловой скоростью и угловым ускорением.

Основным содержанием такого исследования является изучение динамических свойств ЛА, к которым относятся устойчивость движения ЛА и его управляемость.

Исследованию этих динамических свойств предшествует изучение статики – движения ЛА, при котором отсутствуют силы инерции (например, при равномерном и прямолинейном движении). Статика характеризуется статической управляемостью и статической устойчивостью ЛА, которые связаны с вопросами балансировки сил и моментов, действующих на ЛА в полете, и которые, в известной мере, определяют эти свойства.

Исследование математических моделей современных ЛА и их систем управления производится с использованием мощной вычислительной техники. Однако постановке задач на компьютере предшествует качественный анализ, выполняемый на упрощенных моделях. Такой анализ позволяет оценить необходимость тех или иных исследований, а в случае их выполнения – оценить достоверность полученных результатов и аргументированно обосновать новые технические решения. Тем самым уменьшается возможный ущерб от неэффективного использования вычислительной техники, от изготовления некачественной продукции и от техногенных катастроф.

В учебном пособии рассматриваются и простейшие математические модели ЛА, пригодные для качественного анализа динамики полета, и современная обобщенная математическая модель, которая может использоваться только при исследованиях с использованием современной вычислительной техники.

Как известно, при решении уравнений динамики полета и исследовании динамических свойств ЛА широко используются как классический, так и операторный методы. В качестве примеров этого использования применены оба метода: классический – при исследовании устойчивости движения и операторный – при изучении динамических свойств ЛА рассматриваемого в качестве элемента системы управления.

Учебное пособие может быть использовано при изучении курсов “Динамика полета”, “Динамика полета и конструкция ЛА”, а также раздела “Динамика полета” в курсе “Летательные аппараты”.

## 1. ОПИСАНИЕ ДИНАМИКИ ПОЛЕТА С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Основой для изучения динамических свойств ЛА служит его математическая модель.

В основе описания в пространстве состояний лежит вывод дифференциальных уравнений, описывающих динамику ЛА, путем изучения физических законов функционирования последнего. Полученная система дифференциальных уравнений выявляет внутреннюю взаимосвязь между всеми физическими величинами, характеризующими работу объекта. Эти физические величины в заданный момент времени называют состоянием объекта управления и обозначают вектором  $\mathbf{x}(t)$ , а набор физических величин и/или их линейные комбинации являются переменными состояниями  $x_i(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ),  $n$  – число переменных состояний (размерность пространства состояния).

Обозначим через  $\mathbf{u}(t)$   $\rho$  – вектор управляющих воздействий, а через  $\mathbf{y}(t)$   $\ell$  – вектор выхода системы ( $\rho, \ell \leq n$ ). Тогда линеаризованной моделью объекта в пространстве состояния принято считать следующую систему линейных дифференциальных уравнений, записанную в векторно-матричной форме:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t); \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (2)$$

где  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  – матрицы размером  $(n \times n)$ ,  $(n \times r)$ ,  $(\ell \times n)$  соответственно.

Элементы матриц могут зависеть от времени, тогда модель объекта называется нестационарной; если элементы матриц не зависят от времени, то модель называется стационарной. В учебном пособии рассматриваются лишь стационарные модели. Форма записи (1), (2) дифференциального уравнения называется нормальной формой Коши.

Общее решение линейного неоднородного уравнения (1) при начальном условии  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  имеет следующий вид:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \left[ \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t_0-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \right], \quad (3)$$

где  $e^{\mathbf{A}t}$  – условное обозначение матрицы размером  $(n \times n)$ , определяемой по формуле

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} \quad (4)$$

и называемой матричной экспонентой.

Если матрица  $\mathbf{A}$  имеет  $n$  попарно различных собственных чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ,  $n$  линейно независимых правых  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  и левых  $v_1, v_2, \dots, v_n$  собственных векторов, то матричную экспоненту можно представить

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} \omega_i v_i^T. \quad (5)$$

Одной из важных характеристик линейной системы управления (1)–(2) являются понятия управляемости и наблюдаемости.

Система (1) называется *полностью управляемой*, если только существует управление  $\mathbf{u}(t)$ , переводящее ее из любого заданного начального состояния  $\mathbf{x}(t_0)$  в любой заданный начальный момент времени  $t_0 \geq 0$  к любому заданному конечному состоянию  $\mathbf{x}(t_1)$  за конечное время  $t_1 - t_0$  ( $t_1 > t_0$ ).

Условие управляемости для линейной стационарной системы может быть получено из рассмотрения дискретного аналога системы дифференциальных уравнений (1)

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(0); \\ \mathbf{x}(2) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) = \mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1); \\ &\vdots \\ \mathbf{x}(\ell) &= \mathbf{A}^\ell \mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^{\ell-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \dots + \mathbf{B}\mathbf{u}(\ell-1). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Если число  $\ell$  совпадает с размерностью вектора  $\mathbf{x}$ , то система (6) рассматривается как система уравнений, позволяющая определять необходи-

мые значения координат вектора управления, переводящего систему (1) из состояния с номером (0) в состояние с номером ( $\ell$ ). Условие управляемости будет выполнено, если эта система алгебраических уравнений будет иметь решение относительно координат вектора управления, т. е. определитель матрицы  $(\mathbf{A}^{\ell-1}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{B})$  не будет равен нулю.

Другими словами, если система с постоянными параметрами (1)–(2) управляема, то ранг матрицы  $\mathbf{Z} = (\mathbf{A}^{\ell-1}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{B})$  должен быть равен размерности вектора состояния

$$\text{rank } \mathbf{Z} = \text{rank}[\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = n, \quad (7)$$

где  $\mathbf{Z}$  – матрица ( $n \times n$ ) управляемости пары матриц  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ .

В противном случае система называется неуправляемой. В такой системе возможно перевести лишь ряд состояний в любые конечные состояния или все состояния можно перевести не в любые, а в определенные области пространства состояний. Аналогично определяются условия наблюдаемости системы.

Система (1)–(2) называется *наблюдаемой*, если только на основе знания входного  $\mathbf{u}(t)$  и выходного  $\mathbf{y}(t)$  векторов на любом конечном интервале времени  $[t_0, t_1]$  за этот интервал может быть восстановлен полный вектор состояния  $\mathbf{x}(t), (t_1 > t_0 \geq 0)$ .

Для системы уравнений (2) составим уравнения для нахождения вектора начального состояния по измерениям координат вектора в последующие моменты времени

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{y}(0) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(0); \\ \mathbf{y}(1) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(1) = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}(0); \\ &\vdots \\ \mathbf{y}(\ell) &= \mathbf{C}\mathbf{A}^{\ell}\mathbf{x}(0). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Система с постоянными параметрами (1)–(2) является наблюдаемой тогда и только тогда, когда

$$\text{rank } \mathbf{Z} = \text{rank}(\mathbf{C}^T, \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T, \dots, (\mathbf{A}^{n-1})^T\mathbf{C}^T) = n, \quad (9)$$

где  $\mathbf{Z} - (n \times n \ell)$  – матрица наблюдаемости пары матриц  $\mathbf{C}, \mathbf{A}$ .

Система (1)–(2) называется *идентифицируемой*, если по измерениям координат вектора состояния можно определить матрицу  $\mathbf{A}$ .

Составим систему уравнений для определения коэффициентов матрицы  $\mathbf{A}$ :

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x}(1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(0); \\ \mathbf{x}(2) = \mathbf{A}\mathbf{x}(1) = \mathbf{A}^2\mathbf{x}(0); \\ \vdots \\ \mathbf{x}(n) = \mathbf{A}^n\mathbf{x}(0). \end{array} \right\} \text{или} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(1) \\ \mathbf{x}(2) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(n) \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{A}\mathbf{x}(0) \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{x}(0) \end{pmatrix},$$

откуда следует *условие идентифицируемости*

$$\text{rank } \mathbf{Z} = \text{rank}(\mathbf{x}^T(0), \mathbf{x}^T(0)\mathbf{A}^T, \dots, \mathbf{x}^T(0)(\mathbf{A}^{n-1})^T) = n.$$

Фундаментальные понятия управляемости, наблюдаемости и идентифицируемости сформулированы только для линейных стационарных систем. Для нелинейных и нестационарных систем они могут быть приближенно использованы только в окрестности точек, интересующих исследователя. Для конкретного вида нелинейных и нестационарных систем могут быть получены частные критерии управляемости, наблюдаемости и идентифицируемости.

*Обобщенная математическая модель  
динамики летательного аппарата*

Исследование статики и динамики полета ЛА проводится на основе предварительно составленной математической модели – системы уравнений движения, представляющей собой математическую запись условий равенства нулю действующих на ЛА сил в проекциях на оси прямоугольных систем координат.

Уравнения движения жесткого недеформируемого ЛА получают согласно теореме о количестве движения, т. е. теореме импульсов:

$$d(m\mathbf{V}) = \mathbf{F}dt$$

и в соответствии с ней

$$d\mathbf{K} = \mathbf{M}dt, \tag{10}$$

где  $m\mathbf{V}$  – количество движения ЛА;  $\mathbf{K} = \mathbf{r} \times (m\mathbf{V})$  – момент количества движения;  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  – момент внешних сил;  $\mathbf{F}$  – вектор внешних сил, действующих на ЛА в полете.



Эти уравнения необходимо дополнить кинематическими соотношениями и уравнениями наблюдения. В результате может быть получена обобщенная математическая модель динамики ЛА следующего вида:

$$d\mathbf{X}/dt = \mathbf{A}(\mathbf{X}, t) \mathbf{X} + \mathbf{B}_A \mathbf{C}_A(\mathbf{X}) + \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \mathbf{F}_{\text{вн}},$$

где  $\mathbf{X}$  – вектор состояния системы размерности  $N_x = N_t + 2n + m + 3$ ;  $\mathbf{X}^T = (x_0, y_0, z_0, dx_0/dt, dy_0/dt, dz_0/dt, \alpha, \beta, \vartheta, \psi, \gamma, \omega_x, \omega_y, \omega_z)$ ;  $t$  – текущее время;  $n$  – количество управляемых координат ЛА;  $\mathbf{F}(\mathbf{U})$  – вектор управляющих функций;  $\mathbf{U} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$  – вектор управлений;  $m$  – размерность вектора управлений;  $(x_0, y_0, z_0)$  – координаты неподвижной, трубной системы координат;  $\mathbf{A}(\mathbf{X})$  – функциональная матрица с переменными коэффициентами, элементы которой не зависят от типа ЛА при  $n = n_{\text{max}}$ , имеющая  $N_x$  строк и  $N_x$  столбцов;  $N_x$  – размерность вектора  $\mathbf{X}$ . Блочная структура матрицы  $\mathbf{A}$  имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathbf{0}_{3,3} & \mathbf{E}_{3,3} & \mathbf{0}_{3, (N_x - n)} \\ \hline & \mathbf{0}_{3, N_x} & \\ \hline \mathbf{0}_{n, n+3} & \mathbf{P}_3^{-1} & \mathbf{0}_{n, (N_t + m + 3)} \\ \hline & \mathbf{A}_w & \\ \hline & \mathbf{0}_{N_t, N_x} & \\ \hline \end{array},$$

где  $\mathbf{0}_{i,j}$  – матрица, составленная из нулей размером  $i \times j$  (с числом строк  $i$  и числом столбцов  $j$ );  $\mathbf{E}_{i,i}$  – квадратная матрица тождественного преобразования размером  $i \times i$ , диагональные элементы которой равны единице, а остальные – нулю;

$$\mathbf{P}_3 = \begin{vmatrix} -\sin \psi & 0 & 1 \\ \cos \psi \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ \cos \psi \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \end{vmatrix},$$

$\mathbf{P}_3$  – матрица перехода от осей связанной системы координат к осям, определяемым векторами угловых скоростей  $d\vartheta/dt, d\psi/dt, d\gamma/dt$ ;  $\mathbf{F}_{\text{вн}}$  – вектор внешних воздействий;  $\mathbf{P}_3^{-1}$  – матрица, обратная по отношению к матрице  $\mathbf{P}_3$ :

$$\mathbf{P}_3^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & \sin \gamma / \cos \psi & \cos \gamma / \cos \psi \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 1 & \text{tg} \psi \sin \gamma & \text{tg} \psi \cos \sin \gamma \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{A}_\omega = \begin{vmatrix} 0 & (I_y - I_z)\omega_z & 0 \\ 0 & 0 & (I_z - I_x)\omega_x \\ (I_x - I_y)\omega_y & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$\mathbf{B}_A$  – матрица размером  $N_x \times N_{CA}$ , блочная структура которой имеет вид

$$\mathbf{B}_A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \mathbf{0}_{3, NCA} \\ \hline \mathbf{P}_c^T \mathbf{B}_{FA} & & \mathbf{0}_{3, (NCA-3)} \\ \hline & & \mathbf{0}_{3, NCA} \\ \hline \mathbf{0}_{3, 3} & \mathbf{B}_{MA} & \mathbf{0}_{3, (NCA-n)} \\ \hline \mathbf{0}_{Nt, n} & & \mathbf{E}_{Nt, Nt} \\ \hline & & \mathbf{0}_{m+3, NCA} \\ \hline \end{array}$$

$\mathbf{B}_{FA} = ((\rho V^2 S) / 2m) \mathbf{E}_{3,3}$ ;  $\mathbf{B}_{MA} = (\rho V^2 S l / 2) \mathbf{J}^{-1}$ ;  $m$  – масса ЛА;  $\mathbf{J}$  – тензор инерции ЛА;  $\mathbf{C}_A^T = (\mathbf{C}_F^T; \mathbf{C}_M^T; \mathbf{L}_1, \dots, \mathbf{L}_{Nt})$ ;  $\mathbf{L}_1 = 1 = \text{const}$ ;  $N_{CA} = n + N_t$ ;  $\mathbf{C}_F = \mathbf{C}_{F0}(\Xi)$ ;  $\mathbf{C}_M = \mathbf{C}_M(\mathbf{X})$  – аэродинамические коэффициенты в связанной системе координат;

Вектор наблюдаемых величин определяется соотношением

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}_H \mathbf{X} + \Xi,$$

где  $\mathbf{Y} = (x_0, y_0, z_0, \alpha, \beta, \vartheta, \psi, \gamma)$ ;  $\Xi = \{\xi_j\}$  – вектор случайных величин размерностью  $(n + m + 1)$ , моделирующий погрешности измерений; при  $n = n_{\max}$  матрица  $\mathbf{A}_H$  имеет вид

$$\mathbf{A}_H = \begin{vmatrix} \mathbf{E}_{3,3} & & \mathbf{0}_{3, (Nx-3)} \\ \mathbf{0}_{3,6} & \mathbf{E}_{3,3} & \mathbf{0}_{3, (Nx-9)} \\ \mathbf{0}_{n, (m+12)} & \mathbf{E}_{n,m} & \mathbf{0}_{n,3} \\ \mathbf{0}_{1,12} & \mathbf{E}_{1,1} & \mathbf{0}_{1, (Nx-13)} \end{vmatrix}.$$

В свою очередь вектор управляющих функций  $\mathbf{F}(\mathbf{U})$  должен быть доопределен системой алгебраических или дифференциальных уравнений, описывающей динамику процессов управления.

## 2. СТАТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И СТАТИЧЕСКАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

### 2.1. Аэродинамические силы и моменты, действующие на летательный аппарат в полете

#### *Системы координат*

Вторые производные от линейных и угловых координат, стоящие в левой части уравнений системы (10), используются при изучении динамики для моделирования сил инерции, возникающих при ускоренном движении ЛА. При изучении статики вторые производные полагаются равными нулю.

Система уравнений (10) в общем случае дополняется уравнениями, устанавливающими соответствие между различными системами координат, которые были использованы при проектировании сил и моментов, а также уравнениями, дополняющими систему (10) до замкнутой системы уравнений. Например, если учитываются силы и моменты, создаваемые органами управления в зависимости от изменяющихся линейных и угловых координат ЛА, систему уравнений необходимо дополнить уравнениями контуров измерения координат и уравнениями контуров управления.

Первая группа уравнений системы (10) отражает движение центра масс, а вторая – движение вокруг центра масс ЛА.

Как следует из рассмотрения системы (10), для изучения особенностей движения ЛА необходимо составить математические модели сил и моментов, действующих на ЛА. Такие модели должны отражать зависимость действующих на ЛА сил и моментов от конструктивных параметров и от параметров законов управления ЛА.

Движение ЛА моделируется обычно в нескольких системах координат (земной, связанной, скоростной, нормальной), выбираемых исследователем при постановке задачи.

Оси и начало координат *нормальной земной* системы координат  $(OX_g Y_g Z_g)$  связаны с выбранной точкой на земной поверхности и с направлением местной вертикали.

Оси *нормальной* системы координат  $(OX_g Y_g Z_g)$  имеют то же направление, что и оси нормальной земной системы координат, но начало координат размещается в центре масс ЛА.

Продольная и нормальная оси и начало координат *связанной* системы координат  $(OXYZ)$  расположены в плоскости продольной симметрии ЛА; продольная ось  $OX$  направлена вперед, нормальная – к верхней части ЛА, поперечная – к правой части ЛА перпендикулярно к плоскости симметрии; начало координат обычно помещают в центр масс ЛА.

Оси и начало координат скоростной системы координат  $(OX_a Y_a Z_a)$  связаны с положением вектора скорости центра масс ЛА; при этом направление скоростной оси  $OX_a$  совпадает с направлением скорости ЛА, ось подъемной силы  $OY_a$  лежит в плоскости продольной симметрии ЛА и направлена к верхней его части, боковая ось  $OZ_a$  направлена в сторону правого борта ЛА.

### *Силы, действующие на ЛА в полете*

1. Сила тяжести. Если пренебречь кривизной и вращением Земли, сила тяжести  $\mathbf{G}$  равна гравитационной силе и направлена вертикально вниз; ее проекции на оси связанной системы координат

$$G_x = -G \sin \vartheta; \quad G_y = -G \cos \vartheta \cos \gamma; \quad G_z = -G \cos \vartheta \sin \gamma.$$

2. Аэродинамические силы. Это силы, вызываемые взаимодействием между атмосферой и движущимся в ней ЛА. Главный вектор аэродинамических сил называется аэродинамической силой планера, обозначается  $\mathbf{R}_A$  и направлен в сторону, противоположную скорости. Его проекции на оси скоростной системы координат:  $X_a$  – сила лобового сопротивления;  $Y_a$  – аэродинамическая подъемная сила;  $Z_a$  – аэродинамическая боковая сила. Проекции  $\mathbf{R}_A$  на оси связанной системы координат называются, соответственно, аэродинамической продольной силой, аэродинамической нормальной силой и аэродинамической поперечной силой.

Каждой из этих проекций ставится в соответствие коэффициент пропорциональности, например для скоростной системы координат

$$c_{y_a} = \frac{Y_a}{qS},$$

где  $q = \frac{\rho V^2}{2}$  – скоростной напор;  $S$  – характерная площадь ЛА (например, площадь крыла).

3. Сила тяги. Сила тяги  $\mathbf{P}$  – это главный вектор системы сил, действующих на ЛА со стороны двигателя в результате его функционирования. Ее проекции на оси связанной системы координат

$$P_x = P \cos \varphi_p; \quad P_y = P \sin \varphi_p.$$

## 2.2. Продольное движение летательного аппарата

*Моменты аэродинамических сил,  
которые действуют на летательный аппарат в продольном движении*

При движении ЛА в атмосфере в общем случае на него действуют аэродинамические силы, создающие моменты относительно трех осей  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  и зависящие от режима: скорости  $V$ , высоты полета  $H$ , положения управляющих плоскостей ( $\delta_n, \delta_v$  – углы и  $\dot{\delta}_n, \dot{\delta}_v$  – угловые скорости отклонения рулей направления и высоты;  $\delta_\omega$  – углы отклонения элеронов).

Главный момент всех аэродинамических сил  $\mathbf{M}$  определяется как момент главного вектора аэродинамических сил относительно центра масс. Проекция главного момента на оси связанной системы координат имеют названия: проекция на ось  $OX$  ( $M_x$ ) – аэродинамический момент крена; проекция на ось  $OY$  ( $M_y$ ) – аэродинамический момент рыскания; проекция на ось  $OZ$  ( $M_z$ ) – аэродинамический момент тангажа. Каждой из этих проекций ставится в соответствие коэффициент пропорциональности, например для аэродинамического момента тангажа

$$M_z = m_z q S b_A,$$

где  $b_A$  – средняя аэродинамическая хорда (САХ), характерный размер ЛА при определении параметров продольного движения.

Под средней аэродинамической хордой крыла произвольной формы в плане понимают хорду равновеликого прямоугольного крыла, моментные характеристики которого совпадают с моментными характеристиками данного крыла.

*Общее выражение для момента тангажа*

Результирующий момент  $\mathbf{M}_R$  определяется аэродинамическим моментом  $\mathbf{M}$  и моментом от тяги двигателя  $\mathbf{M}_P$ :

$$\mathbf{M}_R = \mathbf{M} + \mathbf{M}_P.$$

При постоянной высоте и скорости полета и небольших значениях кинематических параметров можно считать, что аэродинамический момент тангажа зависит от них линейно. Расчеты и экспериментальные данные показывают, что при малых значениях кинематических параметров коэффициент момента тангажа ЛА можно представить следующей зависимостью:

$$m_z = m_{z_0} + m_z^\alpha \alpha + m_z^{\delta_B} \delta_B + m_z^{\bar{\alpha}} \bar{\alpha} + m_z^{\bar{\delta}_B} \bar{\delta}_B + m_z^{\bar{\omega}_z} \bar{\omega}_z,$$

где  $\bar{\omega}_z = \frac{\omega_z b_A}{V}$ ;  $\bar{\alpha} = \frac{\dot{\alpha} b_A}{V}$ ;  $\bar{\delta}_B = \frac{\dot{\delta}_B b_A}{V}$ ;  $m_{z_0}$  – коэффициент момента тангажа при  $\alpha = \delta_B = \bar{\alpha} = \bar{\delta}_B = \bar{\omega}_z = 0$ , зависящий только от конструктивных параметров, формы летательного аппарата и продольного момента, создаваемого двигателем.

Величины  $m_z^\alpha, m_z^{\delta_B}$  называются статическими производными коэффициента продольного момента,  $m_z^{\bar{\alpha}}, m_z^{\bar{\delta}_B}, m_z^{\bar{\omega}_z}$  – вращательными производными коэффициента продольного момента.

В том случае, когда отсутствует вращение ЛА относительно центра тяжести ( $\bar{\alpha} = \bar{\delta}_B = \bar{\omega}_z = 0$ ), выражение для продольного момента приводится к виду

$$m_z = m_{z_0} + m_z^\alpha \alpha + m_z^{\delta_B} \delta_B.$$

С достаточным приближением можно считать, что продольный момент ЛА состоит из продольного момента фюзеляжа, крыльев, оперения и из продольного момента, создаваемого двигателем. До начала расчетов коэффициент момента тангажа определяют при испытаниях модели ЛА и отдельных его элементов в аэродинамической трубе. При этом указывают положение той точки, относительно которой определялся аэродинамический момент тангажа. Обычно считают, что в этой точке с координатами  $(x_T, y_T)$  расположен центр масс ЛА. Координаты центра масс представляют

в относительных величинах ( $\bar{x}_T = \frac{x_T}{b_A}$ ;  $\bar{y}_T = \frac{y_T}{b_A}$ , в долях или в процентах САХ), в системе осей, начало которых  $O$  помещено в носке САХ, ось  $OX$  направлена вдоль этой хорды назад, а ось  $OY$  – перпендикулярно САХ и вверх по отношению к ЛА.

Продольный момент, создаваемый фюзеляжем, сравнительно невелик и определяется соотношением

$$M_{z\phi} = Y_{\phi}(x_{d\phi} - x_{T\phi}),$$

где  $Y_{\phi}$  – подъемная сила, создаваемая фюзеляжем;  $x_{d\phi}$  – координата центра давления фюзеляжа, отсчитываемая от носовой оконечности ЛА;  $x_{T\phi}$  – координата центра тяжести фюзеляжа.

Продольный момент крыла приближенно может быть определен как произведение величины подъемной силы крыла на абсциссу центра давления  $x_{dkp}$  относительно центра тяжести ЛА

$$M_{z_{кр}} = Y_{кр}(x_{dkp} - x_T).$$

Используя соотношения для продольного момента подъемной силы относительно его передней кромки, полученное выражение для  $m_{z_{кр}}$ , можно привести к виду

$$m_{z_{кр}} = C_{m_0} + C_y(\bar{x}_T - \bar{x}_F),$$

где  $\bar{x}_F = \frac{x_F}{b_A}$  – относительная координата фокуса крыла (или линии фокусов), который представляет собой точку приложения части подъемной силы (для крыла с несимметричным профилем), обусловленной углом атаки;  $C_{m_0}$  – коэффициент момента крыла при  $\alpha = 0$ . Если продифференцировать последнее выражение по  $C_y$ , то можно получить статическую производную

$$m_{z_{кр}}^{C_y} = (\bar{x}_T - \bar{x}_F).$$

В общем случае вектор тяги двигателя  $\mathbf{P}$  может не проходить через центр тяжести ЛА. В этом случае при работе двигателя будет возникать дополнительный продольный момент (рис. 1)

$$M_{z_{дв}} = -PY_p,$$

где  $Y_p$  – расстояние между направлением вектора тяги двигателя и центром тяжести ЛА.

При повороте руля или стабилизатора создается дополнительная подъемная сила и дополнительный момент относительно центра тяжести ЛА. Продольный момент, создаваемый подъемной силой гори-

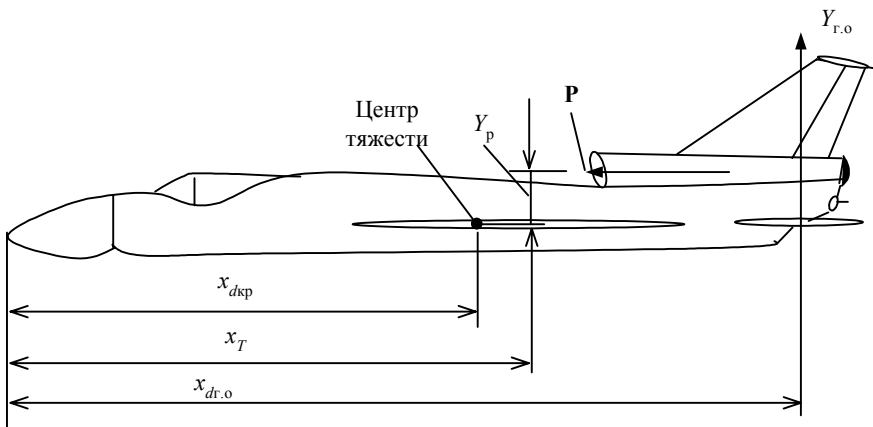


Рис. 1. Силы, создающие моменты тангажа  $M_{дв}$  и  $M_{г.о}$

зонтального оперения  $Y_{г.о}$ , приложенной в центре давления с координатой  $x_{дг.о}$ , для обычной классической аэродинамической схемы ЛА (рис. 1) можно записать

$$M_{z_{г.о}} = Y_{г.о}(x_T - x_{дг.о}).$$

Рассмотренные моменты тангажа, действующие на элементы ЛА, могут быть условно разделены на три группы:

1. Моменты, зависящие от конструктивных параметров ЛА (моменты крыла, фюзеляжа и горизонтального оперения при нулевом угле атаки и нулевом положении руля высоты, момент от тяги двигателя). Сумма всех этих составляющих продольного момента, или коэффициента момента, обозначается  $M_{z_0}$ , или  $m_{z_0}$ .

2. Моменты, зависящие от угла атаки ЛА (моменты крыла, фюзеляжа, горизонтального оперения). Сумма этих моментов (или соответствующий коэффициент момента) обозначается  $M_z^\alpha$ , или  $m_z^\alpha$ .

3. Моменты или коэффициенты моментов, зависящие от угла отклонения рулей высоты обозначаются  $M_z^{\delta_B}$ , или  $m_z^{\delta_B}$ .

*Моменты тангажа, обусловленные продольным вращательным движением летательного аппарата*

При вращении ЛА относительно центра тяжести с угловой скоростью  $\omega_z$  (рис. 2) каждая точка его поверхности, кроме поступательной скорости, приобретает дополнительную скорость, равную  $\omega_z r$  и направ-



ленную перпендикулярно радиус-вектору  $r$ , соединяющему центр тяжести с этой точкой. В результате местные углы атаки элементов поверхности отличаются от углов атаки при поступательном движении. Изменение углов приводит к появлению дополнительных аэродинамических сил, которые можно свести к равнодействующей силе  $\Delta R(\omega_z)$ , приложенной в центре тяжести ЛА, и моменту  $\Delta M_z(\omega_z)$  относительно поперечной оси, проходящей через центр тяжести. Величина  $\Delta R(\omega_z)$  очень мала и в расчетах подъемной силы ЛА ею пренебрегают. Величина же  $\Delta M_z(\omega_z)$  существенно влияет на динамические свойства ЛА.

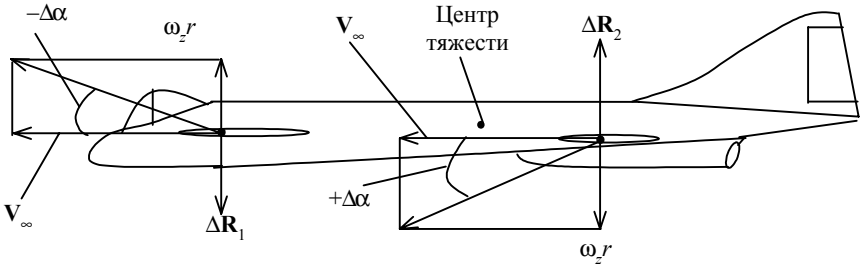


Рис. 2. Силы, обусловленные продольным вращением ЛА

Как следует из рис. 2, момент, обусловленный угловой скоростью  $\omega_z$ , всегда направлен против вращения, поэтому он называется демпфирующим моментом тангажа, или продольным демпфирующим моментом (способствует затуханию колебаний, возникающих при отклонении ЛА от положения равновесия или при переходе от одного положения равновесия к другому). Опыт показывает, что величина демпфирующего момента пропорциональна угловой скорости  $\omega_z$

$$\Delta M_z(\omega_z) = M_z^{\omega_z} \omega_z.$$

Основными частями ЛА, создающими продольный демпфирующий момент, являются горизонтальное оперение, крыло и фюзеляж ЛА. Поэтому можно записать

$$M_z^{\omega_z} = M_{z\phi}^{\omega_z} + M_{zг.о}^{\omega_z} + M_{zкр}^{\omega_z}.$$

При неустановившемся движении ЛА коэффициенты аэродинамических сил и моментов зависят не только от значений  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $\omega_z$ , но и от скорости угла атаки  $\dot{\alpha}$  и скорости перекаладки руля  $\dot{\delta}$ . Пусть ЛА совер-

шает полет с некоторой скоростью  $V$  и с изменяющимся по времени углом атаки. В соответствии с изменением угла атаки изменяется и скоп потока за крылом. Однако поток, отклоненный крылом, достигает горизонтального оперения не мгновенно, а через некоторый промежуток времени  $\Delta t$ , зависящий от расстояния между передними и задними поверхностями и от скорости потока в районе расположения горизонтального оперения  $V_1$  (рис. 1)

$$\Delta t = \frac{x_{dг.о} - x_{dкр}}{V_1}.$$

Следовательно, угол атаки горизонтального оперения в момент времени  $t$  будет таким, который вызывается крылом в момент времени  $t_1 = t - \Delta t$ . Изменение угла атаки крыла за время  $\Delta t$  составляет

$$\Delta\alpha = \frac{d\alpha}{dt} \Delta t = \dot{\alpha} \frac{x_{dг.о} - x_{dкр}}{V_1},$$

а изменение угла скоса потока на горизонтальном оперении будет

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon^\alpha \Delta\alpha.$$

Это запаздывание скоса потока приводит к появлению дополнительной силы на горизонтальном оперении

$$\Delta Y_{г.о} = C_{y_{г.о}}^\alpha \Delta\varepsilon q_{г.о} S_{г.о}$$

и, следовательно, дополнительного момента горизонтального оперения относительно центра тяжести ЛА

$$\Delta M_{z_{г.о}} = \Delta Y_{г.о} (x_T - x_{dг.о}).$$

Тогда коэффициент момента от запаздывания скоса потока можно выразить

$$m_z(\dot{\alpha}) = \frac{-\Delta M_{z_{г.о}}}{q S b_A}.$$

Знак минус перед выражением момента поставлен потому, что положительное приращение подъемной силы горизонтального оперения  $\Delta Y_{г.о}$  вызывает появление пикирующего (отрицательного) мо-

мента  $\Delta M_z$ . Соответствующая производная коэффициента момента может быть найдена

$$m_z^{\bar{\alpha}} = \frac{\partial M_z}{\partial \bar{\alpha}}.$$

Явление запаздывания скоса потока возникает не только при изменении угла атаки, но и при изменении угла отклонения руля высоты, если руль располагается на передней поверхности ЛА, т. е. это может иметь место на ЛА, выполненном по схеме “утка”.

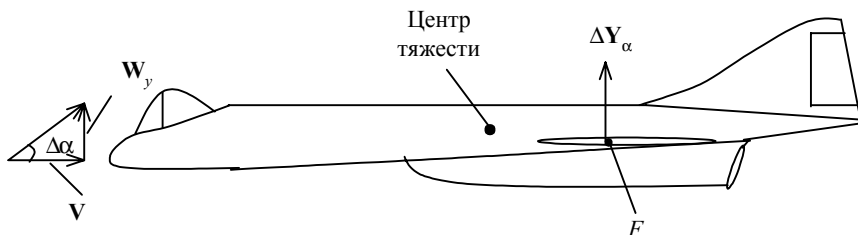
### 2.3. Продольная статическая устойчивость летательного аппарата

Под статической устойчивостью движения понимается тенденция к восстановлению исходного (равновесного) движения при его нарушении возмущающим воздействием.

Обычно принято рассматривать это свойство относительно тех или иных параметров движения. В продольном движении наибольший интерес представляет статическая устойчивость по перегрузке (сохранение постоянного угла атаки или перегрузки) и по скорости полета (сохранение постоянной скорости). Наличие тенденции вернуться к исходному равновесному значению параметра движения конечно еще не означает безусловное его восстановление. Однако статическая устойчивость является необходимым, хотя и недостаточным условием динамической устойчивости.

#### *Устойчивость по перегрузке*

Под исходным равновесным продольным движением ЛА понимают такой его полет, при котором сумма моментов всех сил, действующих на ЛА, равна нулю, т. е.  $m_z = 0$ . Пусть ЛА, движущийся с постоянной скоростью горизонтально (равновесное движение), вошел в вертикально восходящий поток воздуха, который движется со скоростью  $W_y$  (рис. 3). Очевидно, что в этом случае ЛА получит приращение угла атаки  $\Delta\alpha = \frac{W_y}{V}$ , а это приведет к нарушению равновесия сил и моментов, появится неуравновешенная сила  $\Delta Y(\alpha)$  с точкой приложения в фокусе ЛА. Аэродинамический фокус – это точка профиля крыла или ЛА, относительно которой момент аэродинамических сил имеет постоянное значение, не зависящее от угла атаки, т. е. точка, в которой  $\frac{\partial m_z}{\partial \alpha} = 0$ .



**Рис. 3. Приращение подъемной силы при восходящем потоке воздуха**

В зависимости от взаимного расположения фокуса и центра тяжести приращение угла атаки вызовет появление моментов: пикирующего (фокус за центром тяжести), кабрирующего (фокус перед центром тяжести) и нулевого (фокус и центр тяжести совпадают).

Для того чтобы ЛА обладал тенденцией к восстановлению исходного угла атаки (этот угол атаки называется балансирующим), необходимо при положительном приращении  $\Delta\alpha$  возникновение отрицательного продольного момента (момента пикирования) и наоборот.

Следовательно, тенденцией к восстановлению исходного угла атаки, т. е. статической устойчивостью по углу атаки, обладает тот ЛА, у которого фокус располагается за центром тяжести. Указанное условие наличия статической устойчивости по углу атаки (критерий статической устойчивости) может быть записано в виде

$$\left. \frac{\partial m_z}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0} = m_z^\alpha \Big|_{\alpha=\alpha_0} < 0,$$

или  $\bar{x}_T - \bar{x}_F < 0$ .

Так как изменение угла атаки при постоянной скорости приводит к изменению нормальной перегрузки на величину  $\Delta n_y = \frac{\Delta Y(\alpha)}{G}$ , пропорциональную углу  $\Delta\alpha$ , то статическая устойчивость по углу атаки равноценна статической устойчивости по перегрузке.

В авиационной практике за меру статической устойчивости по перегрузке принята частная производная  $m_z^{C_y}$  от коэффициента момента  $m_z$  и по коэффициенту подъемной силы  $C_y$ , так как  $C_y$  линейно зависит от  $\alpha$  в летном диапазоне углов атаки. Летательный аппарат тогда:

$$\text{при } m_z^{C_y} \Big|_{\alpha=\alpha_0} < 0 \text{ — устойчив по перегрузке;}$$

при  $m_z^{C_y} \Big|_{\alpha=\alpha_6} = 0$  – нейтрален;

при  $m_z^{C_y} \Big|_{\alpha=\alpha_6} > 0$  – неустойчив по перегрузке.

С большой достоверностью степень устойчивости по перегрузке может быть определена, исходя из геометрического смысла, как тангенс угла наклона касательной к моментной диаграмме ЛА при балансировочном угле атаки (рис. 4). Согласно определению устойчивости по перегрузке, производная должна быть меньше нуля ( $m_z^{C_y} \Big|_{\alpha=\alpha_6} < 0$ ). Летательный аппарат устойчив по перегрузке, если наклон касательной к моментной кривой в точке балансировки отрицательный; ЛА неустойчив, если наклон положителен, нейтрален, если наклона нет (рис. 4).

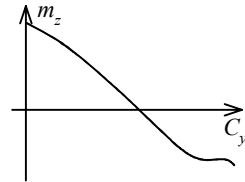


Рис. 4. Моментная диаграмма

Исходя из выражения  $m_z^\alpha = \bar{x}_T - \bar{x}_F$ , мерой запаса устойчивости ЛА является расстояние между центром тяжести и фокусом ЛА.

#### *Устойчивость летательного аппарата по скорости*

Тенденция ЛА к сохранению постоянной скорости движения без вмешательства пилота или любой системы управления называется статической устойчивостью ЛА по скорости. Изменение скорости полета  $\Delta V$ , обусловленное внешними случайными возмущающими факторами, вызывает нарушение равновесия сил и моментов. Очевидно, что ЛА будет статически устойчивым по скорости, если приращения сил и моментов направлены на восстановление исходной скорости полета.

Пусть статически устойчивый по перегрузке ЛА вошел в полосу встречного ветра, движущегося со скоростью  $W_x$ , в результате чего его воздушная скорость стала равна  $V + W_x$ . Поскольку ЛА сразу не может снизить свою скорость до исходной, постольку с увеличением скорости увеличивается как подъемная сила ЛА, так и его сопротивление

$$Y = \frac{1}{2} C_{y\rho} (V + \Delta V)^2 S; \quad X = \frac{1}{2} C_{x\rho} (V + \Delta V)^2 S.$$

Под действием приращения подъемной силы траектория движения ЛА начнет искривляться вверх, нарушится равновесие сил по касательной и по нормали к траектории. Искривление траектории приведет к увеличению потенциальной энергии ЛА за счет увеличения высоты полета и к снижению кинетической энергии. Увеличение силы сопротивления также влечет за собой снижение скорости полета. Следовательно, в данном случае ЛА будет иметь тенденцию возвращаться к исходной скорости полета.

С изменением скорости полета ЛА имеет тенденцию к изменению угла атаки. Следовательно, оценку способности летательного аппарата сохранять заданную скорость полета необходимо, учитывая зависимость подъемной силы от угла атаки и скорости

$$\frac{dY}{dV} = \frac{\partial Y}{\partial V} + \frac{\partial Y}{\partial C_y} \frac{dC_y}{dV} = Y^V + Y^{C_y} C_y^V > 0.$$

Последнее условие для устойчивого по перегрузке ЛА, т. е. условие устойчивости может быть записано после некоторых преобразований

$$\frac{dY}{dV} = Y^V \frac{m_z^{C_y} - \frac{1}{2C_y} V m_z^V}{m_z^{C_y}} > 0.$$

Так как  $Y^V > 0$  всегда, то для выполнения неравенства при  $m_z^{C_y} < 0$  (условие устойчивости по перегрузке) необходимо выполнение неравенства

$$m_z^{C_y} - \frac{1}{2C_y} V m_z^V < 0.$$

Для ЛА, совершающего горизонтальный полет, из условия ( $Y_a = G$ ) может быть найдена зависимость  $C_y(V)$  и получено выражение

$$\frac{dm_z}{dC_y} = m_z^{C_y} - \frac{1}{2C_y} V m_z^V,$$

откуда следует, что условием статической устойчивости по скорости

является неравенство  $\frac{dm_z}{dC_y} < 0$ .

*Понятие о продольной статической управляемости  
(продольная балансировка и балансировочная диаграмма  
по отклонению рулей)*

Установившимся движением ЛА называется такое движение, при котором кинематические параметры ( $\alpha, \beta, \gamma, \psi, \vartheta, \omega_x, \omega_y, \omega_z$ ) остаются неизменными с течением времени. Вообще говоря, понятие установившегося движения ЛА является условным, так как при прямолинейном полете ЛА с постоянной скоростью изменение массы ЛА за счет расхода топлива изменяет угол атаки. Однако если рассматривать движение за короткий промежуток времени, то можно с некоторыми допущениями считать движение установившимся. Для установившегося движения характерно равновесие моментов сил, действующих на ЛА. Такому движению соответствует определенное сочетание значений параметров  $V, \alpha, \omega_z$  и определенное положение органов управления. Движение ЛА при равновесии моментов действующих сил называется балансировочным. В соответствии с этим режимы такого полета также называются балансировочными. При установившемся продольном движении ЛА  $\dot{\alpha} = \dot{\delta} = 0$ . Следовательно, условием продольной балансировки является равенство

$$m_z = m_{z_0} + m_z^\alpha \alpha + m_z^{\delta_B} \delta_B + m_z^{\bar{\omega}_z} \bar{\omega}_z = 0.$$

Пользуясь этим выражением, можно получить значение балансировочного угла руля высоты

$$\delta_{B,\bar{\delta}} = \frac{-1}{m_z^{\delta_B}} (m_{z_0} + m_z^\alpha \alpha + m_z^{\bar{\omega}_z} \bar{\omega}_z).$$

Для прямолинейного установившегося движения это выражение упрощается

$$\delta_{B,\bar{\delta}} = \frac{-1}{m_z^{\delta_B}} (m_{z_0} + m_z^\alpha \alpha).$$

Для ЛА, симметричных относительно плоскости  $XOZ$ ,  $m_{z_0} = 0$ . Тогда

$$\delta_{B,\bar{\delta}} = \frac{-1}{m_z^{\delta_B}} m_z^\alpha \alpha, \text{ или } \frac{\alpha_{\bar{\delta}}}{\delta_{B,\bar{\delta}}} = \left( \frac{\alpha}{\delta} \right)_{\bar{\delta}} = \frac{-m_z^{\delta_B}}{m_z^\alpha}.$$

Очевидно, что это выражение может рассматриваться как мера статической управляемости ЛА, так как оно оценивает изменение угла атаки в балансировочном режиме на единицу изменения угла отклонения рулей.

Учитывая, что  $m_z^{\alpha} = C_y^{\alpha}(\bar{x}_T - \bar{x}_F)$ , можно получить еще одно выражение для меры продольной статической управляемости

$$\frac{\alpha_{\delta}}{\delta_{в.б}} = \left( \frac{\alpha}{\delta} \right)_{\delta} = \frac{-m_z^{\delta_B}}{C_y^{\alpha}(\bar{x}_T - \bar{x}_F)}.$$

Значения  $\delta_{в.б}$ , вычисленные и построенные для различных углов атаки при заранее известной величине  $m_z^{\delta_B}$ , которая обычно определяется экспериментально, представляют собой балансировочную диаграмму по отклонению рулей.

Используя выражения для скорости прямолинейного полета

$$V = \sqrt{\frac{2G \cos \theta}{\rho S C_y}},$$

балансировочные диаграммы можно перестроить в форме  $\delta_{в.б} = f(V)$  (рис. 5, а и б).

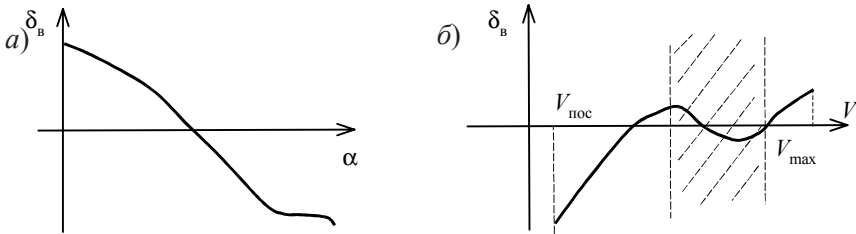


Рис. 5. Балансировочные диаграммы

Балансировочная диаграмма по скорости позволяет определить требуемые углы отклонения рулей во всем летном диапазоне скоростей (от  $V_{\text{пос}}$  до  $V_{\text{max}}$ ).

Перекладка руля, как правило, должна быть такой, чтобы увеличение скорости отвечало отклонению руля вниз. Однако, как видно из диаграмм  $\delta_{в.б} = f(V)$ , имеется область обратной перекладки руля. Это связано с явлениями волнового кризиса при околозвуковых скоростях полета, которые вызывают смещение фокуса ЛА назад. Балансировочный угол руля высоты зависит от взаимного расположения центра тя-



жести и фокуса ЛА и при любом изменении центра тяжести будет нарушаться балансировка ЛА. Это приводит к увеличению необходимого для балансировки ЛА диапазона углов отклонения руля. В связи с этим при конструировании ЛА, полностью заправленного и снаряженного устанавливается предельное значение  $\bar{x}_T$  относительно  $\bar{x}_F$ .

## 2.4. Боковое движение

*Аэродинамические моменты, действующие на ЛА в боковом движении*

В боковом движении на ЛА действуют моменты крена и рыскания. Момент крена (или поперечный)  $M_x$  – это момент, действующий на ЛА относительно продольной оси  $OX$  (рис. 6). Он определяется выражением

$$M_x = m_x q S \frac{\ell}{2},$$

где  $\frac{\ell}{2}$  – характерный размер в продольном движении ЛА (обычно – половина размаха крыла);  $m_x = f(\beta, \delta_\sigma, \delta_H)$  – коэффициент момента крена.

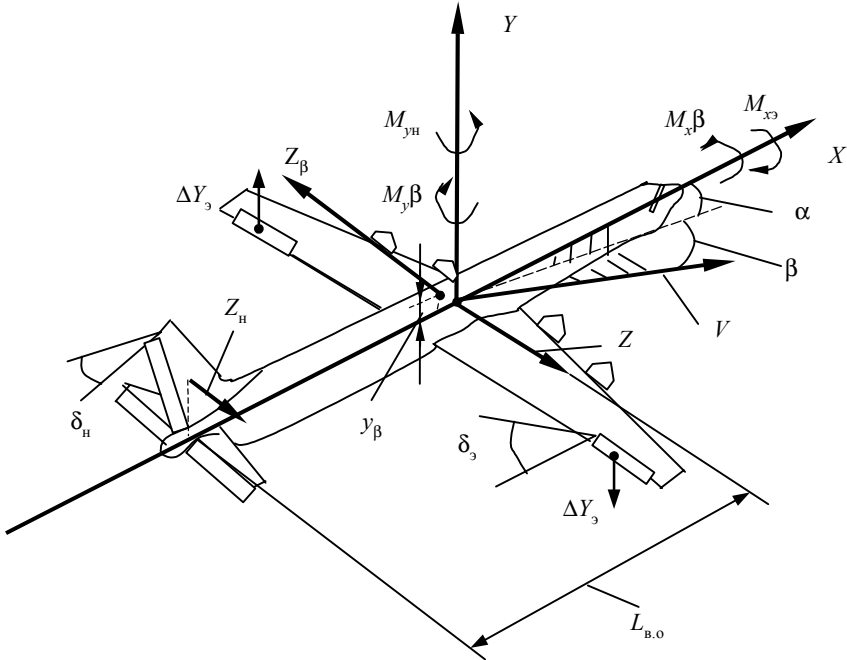


Рис. 6. Силы и моменты, действующие на ЛА при боковом движении

Пусть угол скольжения ЛА увеличился, например за счет бокового ветра. В этом случае боковая аэродинамическая нагрузка на ЛА приведет к появлению боковой силы  $Z_\beta$ . Фокус боковой силы, благодаря вертикальному оперению, располагается выше центра тяжести ( $y_\beta > 0$ ) и за центром тяжести  $\bar{x}_{F_\beta} > \bar{x}_T$ , считая от носа ЛА. Таким образом, боковая сила, обусловленная углом скольжения  $\beta$ , вызовет появление момента крена  $M_{x\beta} = Z_\beta y_\beta$  или в безразмерном виде

$$m_{x\beta} = \frac{M_{x\beta}}{qS\ell/2} = C_z^\beta \beta \frac{y_\beta}{\ell/2} = m_{x\beta}^\beta \beta,$$

где  $m_x^\beta = C_z^\beta \frac{y_\beta}{\ell/2}$ .

Для управления ЛА по углу крена используются управляющие поверхности – элероны, которые расположены на консолях крыла и отклоняются всегда в разные стороны, например, если на правом крыле – вниз, то на левом – вверх. При этом на правом крыле появляется дополнительная сила  $\Delta Y_3$ , направленная вверх, а на левом –  $(-\Delta Y_3)$ , направленная вниз.

Момент крена при отклонении элеронов будет определяться выражением

$$M_{x\epsilon} = 2\Delta Y_3 z_\epsilon,$$

где  $z_\epsilon$  – расстояние центра давления элеронов от продольной оси ЛА.

Поперечный момент  $M_x$  возникает при отклонении вертикальных рулей – рулей направления

$$M_{x\eta} = Z_\eta h_{\beta,0},$$

где  $h_{\beta,0}$  – ордината центра давления вертикального оперения.

Два последних момента в безразмерном виде могут быть записаны, как

$$m_{x_3} = m_x^{\delta_3} \delta_3; \quad m_{x_\eta} = m_x^{\delta_\eta} \delta_\eta.$$

Таким образом, для момента крена в безразмерном виде можно получить

$$m_x = m_x^\beta \beta + m_x^{\delta_3} \delta_3 + m_x^{\delta_\eta} \delta_\eta.$$

Момент рыскания, или путевой момент  $M_y$ , есть момент аэродинамических сил относительно оси  $OY_1$ . Его можно записать в виде

$$M_y = m_y q S \frac{\ell}{2},$$

где  $m_y = f(\beta, \delta_H)$  – коэффициент момента рыскания.

Как видно из рис. 6,

$$M_{y\beta} = Z_\beta x_\beta;$$

$$M_{y\delta_H} = Z_H L_{в.о.},$$

где  $L_{в.о.}$  – абсцисса центра давления вертикального оперения.

Коэффициенты моментов  $m_y^\beta$  и  $m_y^{\delta_H}$  запишутся в виде  $m_y^\beta = C_z^\beta \frac{2x_\beta}{\ell}$  ;  
 $m_y^{\delta_H} = C_z^{\delta_H} \frac{2L_{в.о.}}{\ell}$  .

Таким образом, для момента рыскания в безразмерном виде можно получить  $m_y = m_y^\beta \beta + m_y^{\delta_H} \delta_H$ .

Следует отметить, что при вращательном движении ЛА относительно осей  $OX_1$  и  $OY_1$  появляются дополнительные моменты:

– поперечный демпфирующий момент  $M_x(\omega_x) = M_x^{\omega_x} \omega_x$ , возникающий при вращении ЛА с угловой скоростью  $\omega_x$ , всегда направлен против вращения;

– поперечный спиральный момент  $M_x(\omega_y) = M_x^{\omega_y} \omega_y$ , возникающий вследствие разности сопротивлений крыльев при вращении ЛА относительно оси  $OY_1$ ;

– путевой спиральный момент  $M_y(\omega_x) = M_y^{\omega_x} \omega_x$ , возникающий вследствие изменения местных углов атаки на крыльях при вращении ЛА относительно поперечной оси; при этом лобовое сопротивление опускающегося крыла увеличивается, а у поднимающегося уменьшается; на ЛА действует момент в сторону опускающегося крыла;

– путевой демпфирующий момент  $M_y(\omega_y) = M_y^{\omega_y} \omega_y$ , возникающий при вращении ЛА с угловой скоростью  $\omega_y$  и всегда направленный против вращения.

Моменты, зависящие от скорости перекаладки рулей  $M_y^{\delta_H} \dot{\delta}_H$  и скорости изменения угла скольжения  $M_y^{\beta} \dot{\beta}$ , являются всегда демпфирующими. В общем виде моменты крена и рыскания, а также их коэффициенты, могут быть представлены выражениями

$$M_x = M_x^\beta \beta + M_x^{\delta_3} \delta_3 + M_x^{\delta_H} \delta_H + M_x^{\omega_x} \omega_x + M_x^{\omega_y} \omega_y;$$

$$M_y = M_y^\beta \beta + M_y^{\delta_H} \delta_H + M_y^{\omega_x} \omega_x + M_y^{\omega_y} \omega_y + M_y^{\dot{\beta}} \dot{\beta} + M_y^{\dot{\delta}_H} \dot{\delta}_H;$$

$$m_x = m_x^\beta \beta + m_x^{\delta_\sigma} \delta_\sigma + m_x^{\delta_H} \delta_H + m_x^{\omega_x} \omega_x + m_x^{\omega_y} \omega_y;$$

$$m_y = m_y^\beta \dot{\beta} + m_y^{\delta_H} \dot{\delta}_H + m_y^{\omega_x} \omega_x + m_y^{\omega_y} \omega_y + m_y^{\dot{\beta}} \dot{\beta} + m_y^{\dot{\delta}_H} \dot{\delta}_H.$$

Следует отметить, что угловые скорости вращательного движения оказывают меньшее влияние на моменты, чем углы атаки, скольжения, крена и углы отклонения рулей ЛА.

## 2.5. Боковая статическая устойчивость летательного аппарата

Под боковой устойчивостью ЛА понимают способность ЛА сохранять заданный режим прямолинейного движения.

Под боковой *статической* устойчивостью ЛА рассматривают способность ЛА иметь тенденцию возвращения к исходному режиму полета без углов скольжения и крена.

Как было показано ранее, движение крена и скольжения взаимосвязаны. Однако при исследовании боковой статической устойчивости для упрощения рассматривают отдельно путевую (флюгерную) устойчивость и поперечную устойчивость.

### *Понятие о путевой статической устойчивости*

Как видно из рис. 6, возникновение угла скольжения  $\beta$  вызывает появление на ЛА момента  $M_{y\beta} = Z_\beta x_\beta$ . Очевидно, что этот момент разворачивает ЛА в сторону уменьшения угла скольжения, а значит, ЛА обладает тенденцией к восстановлению режима полета без угла скольжения. Критерием путевой статической устойчивости можно считать производную  $m_y^\beta$ :

- $m_y^\beta < 0$  – ЛА обладает путевой статической устойчивостью;
- $m_y^\beta = 0$  – ЛА обладает нейтральной устойчивостью;
- $m_y^\beta > 0$  – ЛА не обладает путевой статической устойчивостью.

Путевая устойчивость ЛА обеспечивается, в основном, вертикальным оперением. Самолет без вертикального оперения, как правило, не обладает путевой устойчивостью. Причем неустойчивость в значительной мере создается фюзеляжем. На современных сверхзвуковых самолетах, имеющих широкий фюзеляж и крыло малого удлинения, вертикальное оперение на больших углах атаки затеняется фюзеляжем и крылом. Поэтому с ростом угла атаки уменьшается и путевая устойчивость самолета, так что при достаточно большом значении угла атаки самолет вообще может потерять путевую устойчивость.

### Понятие о поперечной статической устойчивости

Если при изменении угла крена имеется тенденция к восстановлению его исходного значения, то ЛА обладает поперечной устойчивостью, т. е. статической устойчивостью по углу крена.

Если под действием случайной причины ЛА получил крен на правое крыло (рис. 7, а и б), то на летательный аппарат действует сила  $\sqrt{Y^2 + G^2}$ , искривляющая траекторию полета. Искривление траектории приведет к появлению угла скольжения  $\beta$  и боковой силы  $Z_\beta$ . Эта боковая сила в зависимости от направления будет либо уменьшать крен, либо увеличивать его. Критерием поперечной устойчивости, следовательно, можно принять величину и знак  $m_x^\beta$ :

$m_x^\beta < 0$  – ЛА обладает поперечной статической устойчивостью;

$m_x^\beta = 0$  – ЛА нейтрален;

$m_x^\beta > 0$  – ЛА не обладает поперечной статической устойчивостью.

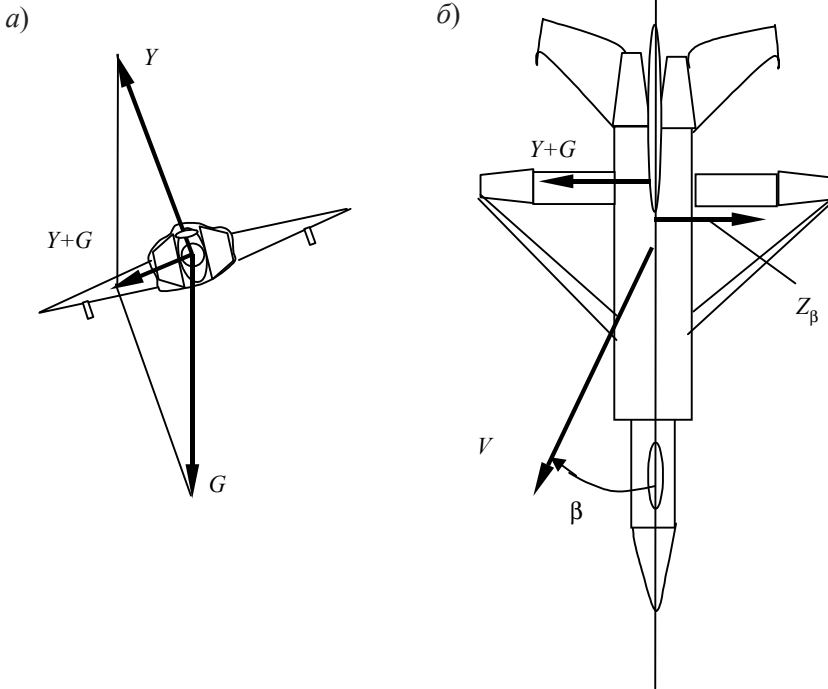


Рис. 7. Равновесие сил при скольжении ЛА

На поперечную устойчивость влияет и расположение крыла по высоте относительно фюзеляжа: нижнее положение крыла относительно фюзеляжа приводит к уменьшению поперечной статической устойчивости, а верхнее – к увеличению.

Большое влияние на поперечную устойчивость ЛА оказывает стреловидность крыла. Прямая стреловидность крыла увеличивает поперечную устойчивость самолета, обратная стреловидность крыла уменьшает. Однако направление влияния стреловидности крыла на поперечную устойчивость при больших углах атаки зависит не только от направления стреловидности, но и от знака угла атаки, а также – от числа Маха, особенно при трансзвуковых скоростях.

## **2.6. Понятие о боковой статической управляемости, боковая балансировка летательного аппарата, балансировочная диаграмма по отклонению рулей**

При выполнении установившегося прямолинейного полета необходимость в балансировке боковых сил и моментов возникает в случае полета со скольжением, при полете с несимметричной тягой в других случаях нарушения геометрической, жесткостной, или аэродинамической симметрии.

Установившийся прямолинейный полет осуществим при выполнении условий

$$\sum F_x = 0; \quad \sum M_x = 0; \quad \sum M_y = 0.$$

*Боковая балансировка ЛА при прямолинейном полете со скольжением*

Балансировочные кривые при боковом движении похожи на балансировочные кривые при продольном движении, однако существует еще один вид балансировочных кривых, свойственных только боковому движению, – балансировочные кривые по угловой скорости крена. В большинстве случаев вращение ЛА по крену можно приближенно считать установившимся движением – движением с постоянной угловой скоростью, соответствующей определенному отклонению органов управления креном, например отклонению элеронов. Для характеристики установившегося вращения по крену используют потребные (балансировочные) отклонения элеронов в зависимости от угловых скоростей крена.

Вращение ЛА по крену может вызываться не только отклонением органов управления креном, но и отклонением органов управления рысканием. Отклонение органов управления рысканием приводит к возникновению угла скольжения, который вызывает появление момента крена.

Таким образом, при боковом движении необходимо определять следующие балансировочные кривые:

- балансировочные кривые отклонений органов управления креном и рысканием по скорости в прямолинейном полете без крена и скольжения;
- балансировочные кривые по перегрузке на заданной скорости при криволинейном полете в вертикальной плоскости без крена и скольжения (или при полете с креном без скольжения в горизонтальной плоскости – при вираже);
- балансировочные кривые в прямолинейном полете со скольжением;
- балансировочные кривые органов управления креном по угловой скорости крена на различных скоростях полета;
- балансировочные кривые органов управления рыскания по угловой скорости крена на различных скоростях полета.

В случае полета со скольжением задача заключается в определении балансировочных значений  $\gamma$ ,  $\delta_3$  и  $\delta_H$ , обеспечивающих прямой полет с заданным углом скольжения (или, что то же самое, при заданном постоянном значении скорости бокового ветра). Условия равновесия моментов относительно осей  $OX$  и  $OY$  записываются

$$M_x = M_x^\beta \beta + M_x^{\delta_3} \delta_3 + M_x^{\delta_H} \delta_H = 0;$$

$$M_y = M_y^\beta \beta + M_y^{\delta_H} \delta_H = 0.$$

Из последних выражений можно получить значения балансировочных углов отклонения руля направления и элеронов

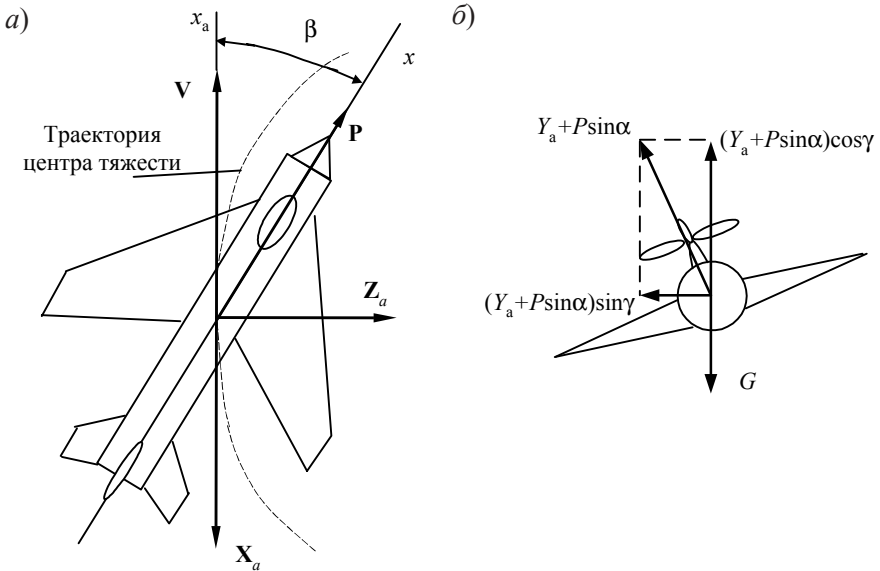
$$\delta_H = -\frac{m_y^\beta}{m_y^{\delta_H}} \beta;$$

$$\delta_3 = -\left( \frac{m_x^\beta}{m_x^{\delta_3}} - \frac{m_x^{\delta_H} m_y^\beta}{m_x^{\delta_3} m_y^{\delta_H}} \right) \beta.$$

Равновесие сил в проекции на поперечную ось  $OZ$  достигается накрениением ЛА в сторону скольжения (рис. 8, *a* и *б*); при этом подъемная сила должна уравновешивать проекцию силы тяжести на нормальную ось  $OY$

$$G \sin \gamma + Z^\beta \beta + Z^{\delta_H} \delta_H = 0;$$

$$G \cos \gamma = Y = C_y q S.$$



**Рис. 8. Равновесие сил в боковой плоскости**

Последние выражения позволяют определить балансировочный угол крена

$$\gamma_6 \approx \operatorname{tg} \gamma = -\frac{1}{C_y} \left( C_z^\beta - C_z^{\delta_H} \frac{m_y^\beta}{m_y^{\delta_H}} \right) \beta.$$

Значения мер статической боковой управляемости определяются как приращения угла  $\beta$  на единицу углов отклонения органов бокового управления. При балансировочном режиме полета

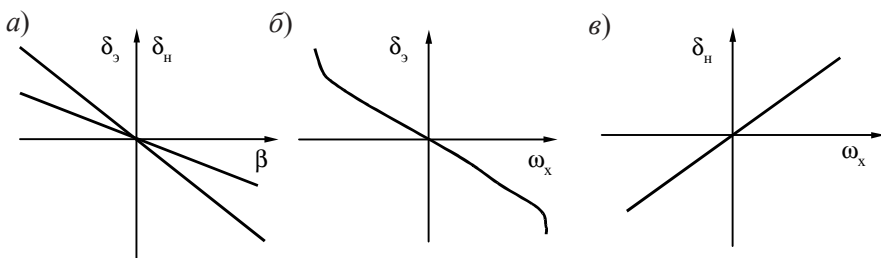


$$\left(\frac{\beta}{\delta_H}\right)_{\delta} = -\frac{m_y^{\delta_H}}{m_y^{\beta}}; \left(\frac{\beta}{\delta_3}\right)_{\delta} = -\frac{m_x^{\delta_3} m_y^{\delta_H}}{m_x^{\beta} m_y^{\delta_H} - m_x^{\delta_H} m_y^{\beta}}.$$

Выражение

$$\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)_{\delta} = -\frac{C_y}{C_z^{\beta} - C_z^{\delta_H} \frac{m_y^{\beta}}{m_y^{\delta_H}}} \approx \text{const}$$

определяет вынужденное значение угла крена ЛА при заданном значении угла скольжения на единицу его изменения.



**Рис. 9. Балансировочные диаграммы по углу скольжения и угловой скорости крена**

По результатам расчетов  $\delta_{H,\delta}$ ,  $\delta_{3,\delta}$  могут быть построены балансировочные диаграммы (рис. 9, а, б и в), характеризующие свойства статической управляемости ЛА. Балансировочные кривые по угловой скорости крена при постоянном угле скольжения показаны на рис. 9.

### 3. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

#### 3.1. Свойство устойчивости движения летательных аппаратов

Действительные траектории ЛА всегда отличаются от теоретических (расчетных), отвечающих конкретным уравнениям движения и заданным начальным условиям. Это определяется не только тем, что динамические свойства ЛА описываются уравнениями лишь приближенно, но и воздействием на ЛА случайных аэродинамических сил, вызванных турбулентностью атмосферы, а также отличием начальных условий и математической модели от действительных. Если возмущающие влияния малы, то действительные (возмущенные) траектории проходят вблизи невозмущенной теоретической. В этом случае кинематические параметры возмущенной траектории ( $V(t)$ ,  $\theta(t)$ , ...,  $\omega_z(t)$ ) можно представить в виде суммы их значений в невозмущенном движении ( $V^*(t)$ ,  $\theta^*(t)$ , ...,  $\omega_z^*(t)$ ) и отклонений или вариаций этих параметров ( $\Delta V(t)$ ,  $\Delta\theta(t)$ , ...,  $\Delta\omega_z(t)$ ) от невозмущенных

$$\left. \begin{aligned} V(t) &= V^*(t) + \Delta V(t); \\ \theta &= \theta^* + \Delta\theta; \\ \vdots \\ \omega &= \omega^* + \Delta\omega. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Допущение о малости отклонений параметров, характеризующих движение ЛА относительно невозмущенной траектории, позволяет систему нелинейных дифференциальных уравнений движения свести к системе линейных дифференциальных уравнений относительно этих отклонений, которая может быть аналитически проинтегрирована.

Общее решение однофазной системы (соответствует закрепленным органам управления  $\Delta\delta_{\text{в}} = \Delta\delta_{\text{н}} = \Delta\delta_{\text{э}} = 0$ ) описывает свободное или собственное движение ЛА и характеризует динамическое свойство ЛА – устойчивость движения. Понятие устойчивости ЛА связывается с тремя типами изменения приращений  $\Delta V(t)$ ,  $\Delta\theta(t)$ , ...,  $\Delta\omega_z(t)$ . В первом случае при неограниченном возрастании времени возникшие отклонения параметров (в некоторый момент времени, когда перестала действовать возмущающая сила) стремятся к нулю – “затухают”, движение ЛА называют устойчивым. Во втором – приращения параметров не затухают, но и не возрастают – движение ЛА называют нейтральным. Наконец, в последнем случае все приращения с течением времени неограниченно возрастают – движение ЛА называют неустойчивым.

Аналогичное определение устойчивости применяется и практически. Так, например, движение самолета, пилотируемого летчиком, называется устойчивым, если самолет обладает способностью самостоятельно (без вмешательства летчика и маневров рулями) возвращаться к исходному режиму полета после прекращения действия возмущений.

Различают продольную и боковую устойчивость. Считают, что ЛА обладает продольной устойчивостью, если с течением времени затухают приращения продольных параметров ( $\Delta V(t)$ ,  $\Delta\theta(t)$ ,  $\Delta\vartheta$ ,  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\omega_z(t)$ ), и боковой, если затухают приращения боковых параметров.

Ранее указывалось, что статическая устойчивость ЛА определяется направлением его движения к исходному режиму в первый момент после прекращения действия возмущения. Однако это условие еще не является гарантией возвращения ЛА к исходному режиму. Можно представить себе, например, что ЛА будет совершать колебания около исходного положения равновесия, причем, эти колебания со временем будут возрастать. Отсюда следует, что так называемая “статическая устойчивость” ЛА есть необходимое, но недостаточное условие действительной, или динамической устойчивости, суждение о которой можно получить, только изучая весь процесс движения ЛА после возмущения.

### 3.2. Линеаризация уравнений движения

Аналитические методы исследования дифференциальных уравнений хорошо разработаны только для систем линейных дифференциальных

уравнений. Поэтому полученная система уравнений обычно линеаризуется. Для этого используется разложение нелинейных функций в ряд Тейлора с удержанием первых двух членов ряда.

Поскольку вариации геометрических параметров считаются малыми величинами, постольку силы и моменты, действующие на ЛА, могут быть представлены рядами Тейлора по степеням приращений этих параметров при ограничении только членами первого порядка малости.

Из теории и эксперимента известно, что силы и моменты практически зависят от определенных комбинаций параметров движения

$$\mathbf{X}=\mathbf{X}(V, H, \alpha, \beta, \delta_{\text{в}}, \delta_{\text{н}}); M_x = M_x(V, H, \alpha, \beta, \omega_x, \omega_y, \omega_z, \delta_y, \delta_n);$$

$$\mathbf{Y}=\mathbf{Y}(V, H, \alpha, \delta_{\text{в}}); M_y = M_y(V, H, \beta, \omega_x, \omega_y, \dot{\beta}, \dot{\delta}_{\text{н}}, \delta_{\text{н}});$$

$$\mathbf{Z}=\mathbf{Z}(V, H, \beta, \delta_{\text{н}}); M_z = M_z(V, H, \alpha, \omega_z, \dot{\alpha}, \dot{\delta}_{\text{в}}, \delta_{\text{в}});$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(V, H, \alpha, \delta_{\text{д.в}}).$$

Эти зависимости можно представить себе как кривые в многомерном пространстве  $F_i(\mathbf{x})$  координат  $\mathbf{x} = (x_i)$ , причем по одной из осей откладываются значения функции  $F_i$ , а по остальным –  $x_i$ . Если через интересующую нас точку этой многомерной кривой можно провести гладкую поверхность, то соответствующую функцию можно представить в виде ряда Тейлора

$$F_i(x_1, \dots, x_n) = F_{i0} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j} x_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 F_i}{\partial x_j \partial x_k} x_j x_k + \dots,$$

где производные берутся в заданной точке многомерной кривой, а значения  $x_j$  и  $x_k$  соответствуют рассматриваемому моменту времени  $t$ .

Удерживая только первые два члена ряда Тейлора, получают линеаризованные модели сил и моментов. Удержание первых трех членов ряда Тейлора привело бы к необходимости рассмотрения билинейных моделей сил и моментов. В данном же пособии рассматриваются только методы анализа линейных моделей динамики полета.

Если пренебречь влиянием отклонения высоты  $\Delta H$  на приращения силы тяги, аэродинамических сил и моментов, а также не рассматривать влияния на возмущенное движение отклонений режима работы двигателя, то в соответствии с (11) можно получить

$$\left. \begin{aligned}
X &= X_* + X_*^V \Delta V + X_*^\alpha \Delta \alpha + X_*^\beta \Delta \beta + X_*^{\delta_B} \Delta \delta_B + X_*^{\delta_H} \Delta \delta_H; \\
Y &= Y_* + Y_*^V \Delta V + Y_*^\alpha \Delta \alpha + Y_*^{\delta_B} \Delta \delta_B; \\
Z &= Z_* + Z_*^V \Delta V + Z_*^\beta \Delta \beta + Z_*^{\delta_H} \Delta \delta_H; \\
M_x &= M_{x*} + M_{x*}^V \Delta V + M_{x*}^\alpha \Delta \alpha + M_{x*}^{\delta_B} \Delta \delta_B + \\
&+ M_{x*}^\beta \Delta \beta + M_{x*}^{\omega_x} \Delta \omega_x + M_{x*}^{\omega_y} \Delta \omega_y + M_{x*}^{\omega_z} \Delta \omega_z + \\
&+ M_{x*}^{\delta_H} \Delta \delta_H + M_{x*}^{\delta_3} \Delta \delta_3; \\
M_y &= M_{y*} + M_{y*}^V \Delta V + M_{y*}^\beta \Delta \beta + M_{y*}^{\omega_x} \Delta \omega_x + M_{y*}^{\dot{\beta}} \Delta \dot{\beta} + \\
&+ M_{y*}^{\delta_H} \Delta \delta_H + M_{y*}^{\dot{\delta}_H} \Delta \dot{\delta}_H; \\
M_z &= M_{z*} + M_{z*}^V \Delta V + M_{z*}^\alpha \Delta \alpha + M_{z*}^{\omega_z} \Delta \omega_z + M_{z*}^{\dot{\alpha}} \Delta \dot{\alpha} + \\
&+ M_{z*}^{\delta_B} \Delta \delta_B + M_{z*}^{\dot{\delta}_B} \Delta \dot{\delta}_B; \\
P &= P_* + P_*^V \Delta V,
\end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где  $X_*^V = \left( \frac{\partial X}{\partial V} \right)_*$ ,  $X_*^\alpha = \left( \frac{\partial X}{\partial \alpha} \right)_*$  и т. п. – частные производные по  $V$ ,  $\alpha$  и другим параметрам, а индекс  $*$  означает, что соответствующие величины вычисляются для исходного режима полета.

Чтобы получить линейные уравнения движения в вариациях в достаточно простом виде полагают, что в невозмущенном движении боковые кинематические параметры  $\psi_*$ ,  $\beta_*$ ,  $\gamma_*$ ,  $\omega_{x*}$ ,  $\omega_{y*}$ , отклонения органов управления боковыми движениями  $\delta_{H*}$ ,  $\delta_{3*}$ , а также производные по времени от продольных параметров  $\omega_{z*} \approx \dot{\vartheta}_*$ ,  $\dot{\alpha}_*$ ,  $\dot{\delta}_B$ ,  $\dot{\theta}_*$  являются настолько малыми, что можно пренебречь их произведениями и произведениями этих параметров на другие малые величины.

Методику линеаризации можно показать на примере линеаризации уравнения сил в проекции на скоростную ось скоростной системы координат

$$m \frac{dV}{dt} = P \cos \alpha \cos \beta - X - G \sin \theta. \quad (13)$$

В соответствии с принятыми допущениями

$$\begin{aligned}
\cos \alpha \cos \beta &= \cos(\alpha_* + \Delta \alpha) \cos(\beta_* + \Delta \beta) = (\cos \alpha_* \cos \Delta \alpha - \\
&- \sin \alpha_* \sin \Delta \alpha)(\cos \beta_* \cos \Delta \beta - \sin \beta_* \sin \Delta \beta).
\end{aligned}$$

Вследствие малости углов можно написать

$$\cos \alpha_* \approx \cos \Delta \alpha \approx \cos \beta_* \approx \cos \Delta \beta = 1; \sin \Delta \alpha \approx \Delta \alpha; \sin \Delta \beta \approx \Delta \beta,$$

где  $\Delta \alpha, \Delta \beta$  измеряется в радианах.

Тогда

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cos \beta &\approx (1 - \sin \alpha_* \Delta \alpha)(1 - \sin \beta_* \Delta \beta) = \\ &= 1 - \sin \beta_* \Delta \beta - \sin \alpha_* \Delta \alpha + \sin \alpha_* \sin \beta_* \Delta \alpha \Delta \beta. \end{aligned}$$

Отбрасывая член второго порядка малости, содержащий произведение  $\Delta \alpha \Delta \beta$ , можно получить

$$\cos \alpha \cos \beta = 1 - \sin \beta_* \Delta \beta - \sin \alpha_* \Delta \alpha. \quad (14)$$

Подставляя (12) и (14) в (13), можно записать

$$\begin{aligned} m \left( \frac{dV_*}{dt} + \frac{d(\Delta V)}{dt} \right) &= (P_* + P_*^V \Delta V) (1 - \sin \beta_* \Delta \beta - \sin \alpha_* \Delta \alpha) - \\ &- (X_* + X_*^V \Delta V + X_*^\alpha \Delta \alpha + X_*^\beta \Delta \beta + X_*^{\delta_B} \Delta \delta_B + X_*^{\delta_H} \Delta \delta_H) - \\ &- G (\sin \theta_* + \Delta \theta \cos \theta_*). \end{aligned}$$

Но с учетом (13)

$$m \frac{dV_*}{dt} = P_* - X_* - G \sin \theta_*,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} m \frac{d(\Delta V)}{dt} &= (P_*^V - X_*^V) \Delta V - (P_* \sin \alpha_* + X_*^\alpha) \Delta \alpha - \\ &- (P_* \sin \beta_* + X_*^\beta) \Delta \beta - X_*^{\delta_B} \Delta \delta_B - X_*^{\delta_H} \Delta \delta_H - G \cdot \cos \theta_* \Delta \theta. \end{aligned}$$

Аналогичным образом линеаризуются и остальные динамические уравнения движения ЛА. В результате полученная система уравнений представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений возмущенного движения ЛА, в которые в качестве неизвестных функций времени входят приращения параметров движения.

### 3.3. Разделение возмущенного движения на продольное и боковое

Полученная система линейных дифференциальных уравнений имеет не менее, чем двенадцатый порядок (три уравнения сил второго порядка и три уравнения моментов второго порядка). Поскольку некоторые аналитические методы исследования предполагают возможность нахождения аналитических выражений для корней характеристических уравнений, постольку возникает необходимость дальнейшей редукции (упрощения) исходной системы дифференциальных уравнений – сведения ее к нескольким системам уравнений не более, чем пятого порядка.

Применительно к рассматриваемому примеру такая редукция может быть произведена на основе допущения о малости боковых параметров. При этом полагают

$$\cos \alpha \cos \beta = 1 - \sin \alpha_* \Delta \alpha,$$

и учитывая, что боковые величины  $X_*^\beta \Delta \beta$ ,  $X_*^{\delta_H} \Delta \delta_H$  пренебрежимо малы, получают

$$m \left( \frac{dV_*}{dt} + \frac{d(\Delta V)}{dt} \right) = (P_* + P_*^V \Delta V) (1 - \Delta \alpha \sin \alpha_*) - \\ - (X_* + X_*^V \Delta V + X_*^\alpha \Delta \alpha + X_*^{\delta_B} \Delta \delta_B) - G (\sin \theta_* + \Delta \theta \cos \theta_*).$$

Окончательно

$$m \frac{d(\Delta V)}{dt} = (P_*^V - X_*^V) \Delta V - (P_* \sin \alpha_* + X_*^\alpha) \Delta \alpha - \\ - G \cos \theta_* \Delta \theta - X_*^{\delta_B} \Delta \delta_B.$$

Полученная система дифференциальных уравнений возмущенного движения ЛА состоит из двух независимых систем. Одна из них после введения так называемых динамических коэффициентов  $a_{ij}$  ( $i$  – номер уравнения;  $j$  – номер приращения в табл. 1).

Таблица 1

№ переменной, $a_{ij}$	1	2	3	4
Обозначение переменной	$V$	$\alpha$	$\theta$	$\omega_z$

С учетом кинематического соотношения  $\Delta\alpha + \Delta\theta - \Delta\vartheta = 0$  система уравнений продольного движения при программном управлении рулем высоты  $\Delta\delta_B$  принимает вид

$$\begin{aligned}
 \frac{d(\Delta V)}{dt} + a_{11}\Delta V + a_{12}\Delta\alpha + a_{13}\Delta\theta &= -b_{11}\Delta\delta_B; \\
 \frac{d(\Delta\alpha)}{dt} + a_{21}\Delta V + a_{22}\Delta\alpha + a_{23}\Delta\theta - \Delta\omega_z &= b_{21}\Delta\delta_B; \\
 \frac{d(\Delta\theta)}{dt} - a_{31}\Delta V - a_{32}\Delta\alpha - a_{33}\Delta\theta &= b_{31}\Delta\delta_B; \\
 \frac{d(\Delta\omega_z)}{dt} + (a_{41} - a'_{42}a_{31})\Delta V + (a_{42} - a'_{42}a_{32})\Delta\alpha - \\
 - a'_{42}a_{33}\Delta\theta + (a_{44} + a'_{42})\Delta\omega_z &= \\
 = (b_{41} - a'_{42}b_{31})\Delta\delta_B + b'_{41} \frac{d(\Delta\delta_B)}{dt}, & \quad (15)
 \end{aligned}$$

где  $a_{11} = -\frac{P^V}{m} + \frac{\rho SV_*^2}{m}$ ;  $a_{12} = c_x^\alpha \frac{\rho SV_*^2}{2m}$ ;  $a_{13} = \frac{G \cos \theta_*}{m}$ ;  $b_{11} = c_x^{\delta_B} \frac{\rho SV_*^2}{2m}$ ;

$$a_{31} = \frac{P^V \sin \alpha_* + c_y^V Q}{mV_*}; \quad a_{32} = \frac{P_* + c_y^\alpha Q}{mV_*}; \quad a_{33} = \frac{g \sin \theta_*}{V_*}; \quad b_{31} = \frac{c_y^{\delta_B} Q}{mV_*};$$

$$a_{21} = a_{31}; \quad a_{22} = a_{32}; \quad a_{23} = a_{33}; \quad b_{21} = b_{31}; \quad a_{41} = -\frac{m_z^V Q b_A}{J_z};$$

$$a_{42} = -\frac{m_z^\alpha Q b_A}{J_z}; \quad a'_{42} = -\frac{m_z^{\dot{\alpha}} Q b_A}{J_z}; \quad a_{44} = -\frac{m_z^{\omega_z} Q b_A}{J_z}; \quad b_{41} = \frac{m_z^{\delta_B} Q b_A}{J_z};$$

$$b'_{41} = \frac{m_z^{\dot{\delta}_B} Q b_A}{J_z}.$$

Коэффициенты  $a_{ij}$  характеризуют динамические свойства ЛА. Так,

например, коэффициент  $a_{44} = -\frac{m_z^{\omega_z} Q b_A}{J_z}$  характеризует аэродинамическое демпфирование ЛА; коэффициент  $a_{42} = -\frac{m_z^\alpha Q b_A}{J_z}$  – статическую



устойчивость; коэффициент  $b_{41} = \frac{m_z^{\delta_b} Q b_A}{J_z}$  – эффективность рулей высоты; коэффициент  $a_{42} = -\frac{m_z^{\alpha} Q b_A}{J_z}$  – влияние запаздывания схода потока на момент тангажа.

Другая система описывает изменение параметров бокового движения. После несложных преобразований она приводится к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(\Delta\beta)}{dt} + a_{61}\Delta\beta + a_{62}\Delta\omega_x + a_{63}\Delta\omega_y + a_{64}\Delta\gamma &= b_{62}\Delta\delta_H; \\ \frac{d(\Delta\omega_x)}{dt} + a_{71}\Delta\beta + a_{72}\Delta\omega_x + a_{73}\Delta\omega_y &= b_{72}\Delta\delta_H + b_{73}\Delta\delta_3; \\ \frac{d(\Delta\omega_y)}{dt} + a_{81}\Delta\beta + a_{82}\Delta\omega_x + a_{83}\Delta\omega_y &= b_{82}\Delta\delta_H + b_{83}\Delta\delta_3; \\ \frac{d\Delta\gamma}{dt} &= \Delta\omega_x, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где

$$a_{61} = -\frac{c_z^{\beta} Q}{mV}; \quad a_{62} = \frac{c_y^{\alpha} Q \alpha}{mV}; \quad a_{63} = -\frac{c_x^{\alpha} \alpha Q}{mV}; \quad a_{64} = -\frac{g \cos \vartheta}{V};$$

$$b_{61} = \frac{c_z^{\delta_H} Q}{mV}; \quad a_{71} = -\frac{m_x^{\beta} J_y + m_y^{\beta} J_{xy}}{J_x J_y - J_{xy}^2} Q \frac{\ell}{2}; \quad a_{72} = -\frac{m_x^{\omega_x} J_y + m_y^{\omega_x} J_{xy}}{J_x J_y - J_{xy}^2} Q \frac{\ell}{2};$$

$$a_{73} = -\frac{m_x^{\omega_y} J_y + m_y^{\omega_y} J_{xy}}{J_x J_y - J_{xy}^2} Q \frac{\ell}{2}; \quad b_{72} = \frac{m_x^{\delta_H} J_y + m_y^{\delta_H} J_{xy}}{J_x J_y - J_{xy}^2} Q \frac{\ell}{2};$$

$$b_{73} = \frac{m_x^{\delta_3} J_y + m_y^{\delta_3} J_{xy}}{J_x J_y - J_{xy}^2} Q \frac{\ell}{2}; \quad a_{81} = -\frac{m_y^{\beta} J_x + m_x^{\beta} J_{xy}}{J_x J_y - J_{xy}^2} Q \frac{\ell}{2};$$

$$a_{82} = -\frac{m_y^{\omega_x} J_x + m_x^{\omega_x} J_{xy}}{J_x J_y - J_{xy}^2} Q \frac{\ell}{2}; \quad a_{83} = -\frac{m_y^{\omega_y} J_x + m_x^{\omega_y} J_{xy}}{J_x J_y - J_{xy}^2} Q \frac{\ell}{2};$$

$$b_{82} = \frac{m_y^{\delta_H} J_x + m_x^{\delta_H} J_{xy}}{J_x J_y - J_{xy}^2} Q \frac{\ell}{2}; \quad b_{83} = \frac{m_y^{\delta_3} J_x + m_x^{\delta_3} J_{xy}}{J_x J_y - J_{xy}^2} Q \frac{\ell}{2}.$$

Как и в случае уравнений, описывающих изменение продольных параметров возмущенного движения  $b_{ij}$  и  $c_{ij}$  – динамические коэффици-

енты, зависящие от производных коэффициентов аэродинамических сил и моментов ( $C_z^\beta, m_x^\beta, m_x^{\omega_x}$  и др.), от конструктивных параметров ЛА ( $G, S, \ell, J_x, J_y$  и др.) и от режима установившегося полета.

### 3.4. Критерии динамической устойчивости

Динамическое свойство ЛА – устойчивость его движения – описывается общим решением однородной системы уравнений. Соответственно, для определения устойчивости неуправляемого ЛА в системе (15) следует положить  $\Delta \delta_b = 0$ . Для упрощения обычно полагают, что невозмущенное движение представляет собой прямолинейный установившийся полет. В этом случае коэффициенты системы уравнений (15) можно считать постоянными.

Частное решение такой системы отыскивается в виде показательных функций

$$\Delta V = Ae^{\lambda t}; \quad \Delta \alpha = Be^{\lambda t}; \quad \Delta \theta = Ce^{\lambda t}; \quad \Delta \omega_z = De^{\lambda t}.$$

После подстановки этих функций и их производных в (15) и сокращения на  $e^{\lambda t}$  система дифференциальных уравнений превратится в систему алгебраических уравнений относительно постоянных  $A, B, C, D$  (неизвестная величина  $\lambda$  входит в эту систему в качестве параметра)

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + a_{11})\Delta V + a_{12}\Delta \alpha + a_{13}\Delta \theta &= 0; \\ a_{21}\Delta V + (\lambda + a_{22})\Delta \alpha + a_{23}\Delta \theta - \Delta \omega_z &= 0; \\ -a_{31}\Delta V - a_{32}\Delta \alpha - (a_{33} - \lambda)\Delta \theta &= 0; \\ (a_{41} - a'_{42}a_{31})\Delta V + (a_{42} - a'_{42}a_{32})\Delta \alpha - \\ - a'_{42}a_{33}\Delta \theta + (\lambda + a_{44} + a'_{42})\Delta \omega_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Нетривиальное решение системы определяется из условия равенства нулю определителя системы (17)

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & \lambda + a_{22} & a_{23} & -1 \\ -a_{31} & -a_{32} & -(a_{33} - \lambda) & 0 \\ a_{41} - a'_{42}a_{31} & a_{42} - a'_{42}a_{32} & -a'_{42}a_{33} & \lambda + a_{44} + a'_{42} \end{vmatrix} = 0,$$

которое сводится к решению алгебраического уравнения 4-й степени (характеристического уравнения) относительно  $\lambda$

$$\Delta(\lambda) = \lambda^4 + P_1\lambda^3 + P_2\lambda^2 + P_3\lambda + P_4 = 0. \quad (18)$$

Коэффициенты  $P_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) являются вещественными величинами, определяющимися теми же параметрами, что и динамические коэффициенты. Каждому из четырех корней этого уравнения соответствует частное решение

$$\Delta V_i = A_i e^{\lambda_i t}; \Delta \alpha = B_i e^{\lambda_i t}; \Delta \theta_i = C_i e^{\lambda_i t}; \Delta \omega_{z_i} = D_i e^{\lambda_i t}.$$

Общее же решение системы (15) будет представлять собой сумму четырех частных решений

$$\Delta V = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + A_3 e^{\lambda_3 t} + A_4 e^{\lambda_4 t}.$$

Так как коэффициенты уравнения (18) являются вещественными величинами, то при анализе свободного возмущенного движения могут быть следующие случаи:

- 1 – все четыре корня вещественные;
- 2 – два корня вещественные и два – комплексные сопряженные;
- 3 – все четыре корня попарно комплексные сопряженные.

В первом случае свободное движение ЛА складывается из четырех аperiodических движений, каждое из которых неограниченно возрастает со временем, если корень положителен, и уменьшается, если корень отрицателен.

Во втором случае пара сопряженных комплексных корней, например  $\lambda_3 = \chi + i\lambda$  и  $\lambda_4 = \chi - i\lambda$ , соответствует частное решение вида

$$\Delta \vartheta_{3,4} = B_3 e^{\lambda_3 t} + B_4 e^{\lambda_4 t}. \quad (19)$$

Поскольку рассматривается реальное движение ЛА, постольку все величины, входящие в окончательное решение уравнений, должны быть вещественными. Это значит, что в рассматриваемом случае постоянные  $B_3$  и  $B_4$  должны быть также комплексными сопряженными

$$B_3 = a - ib; \quad B_4 = a + ib.$$

Пользуясь формулами Эйлера:

$$e^{v t} + e^{-v t} = 2 \cos vt \quad \text{и} \quad e^{v t} - e^{-v t} = 2i \sin vt,$$

частное решение (19) можно преобразовать к виду

$$\Delta\vartheta_{3,4} = Be^{\chi t} \sin(\nu t + \psi),$$

где  $B = 2\sqrt{a^2 + b^2}$ ;  $\psi = \operatorname{arctg} \frac{a}{b}$ .

Итак, пара комплексных сопряженных корней дает колебательное движение с амплитудой  $Be^{\chi t}$ , угловой частотой  $\nu$  и фазой  $\psi$ . Общее же решение в этом случае

$$\Delta V = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + Ae^{\chi t} \sin(\nu t + \psi)$$

и выражает наложение двух аperiодических и одного колебательного движений.

В третьем случае, который встречается наиболее часто, свободное возмущенное движение ЛА представляет собой наложение двух колебательных движений:

$$\Delta\omega_z = C_1 e^{\chi t} \sin(\nu t + \psi_1) + C_2 e^{\xi t} \sin(\eta t + \psi_2).$$

Итак, во всех случаях поведение возмущений  $\Delta V$ ,  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\omega_z$  и  $\Delta\theta$  определяется показательной функцией вида  $e^{\chi t}$ , где  $\chi$  – вещественный корень или вещественная часть комплексного корня характеристического уравнения. Отсюда и условие или критерий устойчивости:

*Летательный аппарат обладает продольной устойчивостью установившегося прямолинейного полета, если все вещественные корни и (или) вещественные части комплексных корней отрицательны.*

Из курса высшей алгебры известно, что необходимым и достаточным условием этого является выполнение неравенств

$$P_1 > 0, P_2 > 0, P_3 > 0, P_4 > 0;$$

$$R = (P_1 P_2 P_3 - P_1^2 P_4 - P_3^2) > 0.$$

Если требуется определить характер свободного возмущенного движения (aperиодическое или колебательное), период колебаний и степень затухания, то для этого необходимо решить характеристическое уравнение. Характер возмущенного движения и его протекание во многом определяют летные качества ЛА. Поэтому при оценке динамических свойств ЛА используют количественные критерии, характеризующие возмущенное движение. К ним относят период колебаний, время

уменьшения амплитуды вдвое, затухание амплитуды за один период.

Период колебаний определяется по выражению  $T = \frac{2\pi}{\nu}$ .

Степень затухания (или нарастания) колебаний характеризуют временем  $t_2$  уменьшения (или увеличения) амплитуды вдвое.

$$\text{При } \chi < 0 \quad e^{\chi t_2} = \frac{1}{2}; \quad t_2 = -\frac{\ln 2}{\chi} = -\frac{0,693}{\chi};$$

$$\text{при } \chi > 0 \quad e^{\chi t_2} = 2; \quad t_2 = \frac{\ln 2}{\chi} = \frac{0,693}{\chi}.$$

Пусть  $Ae^{\chi n T}$  и  $Ae^{\chi(n+1)T}$  – две последовательные амплитуды для моментов времени, отличающихся на период  $T$ . Тогда затухание (нарастание) амплитуды за один период можно найти по соотношению

$$\frac{Ae^{\chi(n+1)T}}{Ae^{\chi n T}} = e^{\chi T} = e^{\frac{2\pi\chi}{\nu}},$$

где  $\frac{\chi}{\nu}$  – мера затухания (возрастания) амплитуды за период  $T$ .

### 3.5. Короткопериодическое (быстропротекающее) и длиннопериодическое продольные возмущенные движения

Летная практика показывает, что для продольного свободного возмущенного движения ЛА характерно наложение двух различных типов движений: быстро и медленно затухающих. Расчеты показывают, что во всех случаях вещественная и мнимая части одной пары комплексных корней по абсолютной величине намного превышают соответствующие значения другой пары корней.

Поскольку вещественная часть комплексного корня характеризует степень затухания, а коэффициент при мнимой единице – частоту возмущенного движения, постольку паре больших (по модулю) комплексных корней соответствует быстро затухающее (короткопериодическое) движение, а паре малых корней – медленно затухающее (длиннопериодическое). В качестве примера можно привести корни и критерии возмущенного движения для реактивного самолета (табл. 2).

Расчеты показывают, что в решениях для  $\Delta V$  коэффициенты при быстро затухающих слагаемых по величине в 100–200 раз меньше коэффициентов при медленно затухающих слагаемых.

В решениях для  $\Delta\vartheta$  и  $\Delta\theta$  быстро и медленно затухающие слагаемые имеют примерно одинаковые значения.

В решениях для  $\Delta\alpha$  коэффициенты при быстро затухающих слагаемых значительно превышают коэффициенты при медленно затухающих слагаемых.

Таблица 2

Параметры	Короткопериодическое движение	Длиннопериодическое движение
Корни характеристического уравнения	$-0,644 \pm 1,687i$	$-0,0056 \pm 0,783i$
Период колебаний, 1/с	3,72	80,3
Время уменьшения амплитуды вдвое, с	1,076	123,8
Затухание за период	0,0907	0,638

Свободное возмущенное движение ЛА можно разбить на два этапа. На первом этапе преобладает быстро затухающее короткопериодическое движение. Отклонения  $\Delta\vartheta$ ,  $\Delta\theta$ ,  $\Delta\alpha$  изменяются резко, отклонение  $\Delta V$  – незначительно.

К концу первого этапа практически уменьшаются до нуля те слагаемые в выражениях для  $\Delta\omega_z$ ,  $\Delta\theta$ ,  $\Delta\alpha$ , которые соответствуют паре больших корней. Отклонение  $\Delta\alpha$  определяется, главным образом, этими слагаемыми и поэтому практически затухает к концу первого этапа.

На втором этапе имеет место только медленно затухающее длиннопериодическое движение. На этом этапе изменяются, в основном,  $\Delta V$ ,  $\Delta\omega_z$  и  $\Delta\theta$ , а колебания  $\Delta\alpha$ , имеющие незначительную амплитуду, практически отсутствуют.

Физической причиной возникновения двух видов движения является значительная инерционность ЛА к изменению скорости и искривлению траектории, что обуславливает медленное изменение параметров, характеризующих траекторию  $\Delta V$ ,  $\Delta\theta$  и относительно быстрое протекание вращательных движений.

Для пояснения “механики” этого процесса можно представить себе изменение параметров полета, вызванное вхождением ЛА в зону восходящего потока. Происходящее при этом приращение угла атаки приводит к возникновению аэродинамического момента  $M_z$  и к уменьшению подъемной силы. Аэродинамический момент вызывает быстрое вращение ЛА таким образом, что статически устойчивый ЛА стремится при-

нять балансировочный угол атаки. Вследствие большого демпфирования вращение ЛА практически заканчивается в первые же секунды возмущенного движения. Изменение подъемной силы вызывает отклонение ЛА от невозмущенной траектории.

К концу первого этапа равновесие моментов относительно поперечной оси практически уже достигается, угловая скорость  $\Delta\omega_z$  близка к нулю. Углы тангажа и наклона траектории  $\vartheta, \theta$  будут отличаться от своих первоначальных значений. Изменение высоты под влиянием приращения подъемной силы и связанное с этим изменение плотности воздуха являются причинами нарушения равновесия силы тяги и лобового сопротивления (и, следовательно, изменения скорости), а также подъемной силы.

Последующее движение будет длиннопериодическим, медленно затухающим и продолжающимся до тех пор, пока не будет достигнуто равновесие сил по нормали и по касательной к траектории. Следует заметить, что длиннопериодическое возмущенное движение самолета протекает в течение настолько длительного времени, что корректировка пилотом этого движения не представляет сложности. Контролировать же и корректировать короткопериодическое движение значительно труднее; кроме того, при большой частоте колебаний и относительно слабом его затухании пассажиры подвергаются воздействию переменной перегрузки, что вызывает болезненные явления и утомление. Именно поэтому исследование короткопериодического возмущенного движения имеет большое практическое значение.

### 3.6. Понятие о характере бокового возмущенного движения

При исследовании боковой устойчивости наиболее часто встречается случай, когда характеристическое уравнение имеет одну пару комплексных сопряженных корней и два вещественных – свободное возмущенное боковое движение складывается из двух аperiодических и одного колебательного. При этом общее решение дифференциальных уравнений бокового возмущенного движения будет

$$\left. \begin{aligned} \beta &= A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + A_3 e^{\chi t} \sin(\nu t + \psi_3) \\ \omega_x &= B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t} + B_3 e^{\chi t} \sin(\nu t + \psi_1) \\ \omega_y &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\chi t} \sin(\nu t + \psi_2) \\ \gamma &= D_1 e^{\lambda_1 t} + D_2 e^{\lambda_2 t} + D_3 e^{\chi t} \sin(\nu t + \psi_4) \end{aligned} \right\}$$

Обычно из двух вещественных корней один по абсолютной величине очень велик, второй – очень мал, комплексные же корни имеют промежуточные значения, например  $\lambda_1 = -1,700$ ;  $\lambda_2 = 0,0011$ ;  $(\lambda_3, \lambda_4) = -0,11 \pm 1,500 i$ . Такому распределению корней соответствуют  $B_1$  и  $D_1$ , много большие по величине, чем другие постоянные. В начале возмущенного движения преобладает частный тип движения, соответствующий большему по модулю вещественному корню  $\lambda_1$ . Этот тип движения называется движением демпфирования крена. При этом  $B_2, B_3, D_2, D_3, \lambda_2$  и  $\chi$  малы, поэтому вторым и третьим слагаемыми за малый промежуток времени  $t$  можно пренебречь. Продолжается это движение доли секунды и, в основном, заключается в быстром аperiодическом изменении угла крена  $\gamma$  и угловой скорости крена  $\omega_x$ . Это движение быстро

затухает, так как  $\lambda_1$  зависит от коэффициента  $a_{72} \approx -\frac{M_x^{\omega_x}}{J_x}$ , который имеет достаточно большое значение для крылатых ЛА.

Остается рассмотреть аperiодическое движение, соответствующее малому корню, и колебательное движение.

Движение, отвечающее малому вещественному корню  $\lambda_2$ , называется спиральным: при  $\lambda_2 > 0$  ЛА с закрепленными рулями движется по спирали с медленным нарастанием всех боковых параметров ( $\psi, \beta, \gamma, \omega_x, \omega_y$ ), т. е. имеет место спиральная неустойчивость.

При этом ЛА кренится и рыскает то в одну, то в другую сторону. В случае колебательной неустойчивости, обусловленной положительным значением вещественной части комплексных корней, амплитуда этого движения со временем возрастает.

Значение рассмотренных частных движений в оценке бокового возмущенного движения ЛА не одинаково. Для крылатого ЛА на малых полетных углах атаки движение демпфирования крена затухает очень быстро и практического интереса не представляет.

Характер свободного возмущенного движения после затухания движения крена определяется соотношением между степенью флюгерной

$a_{81} \approx -\frac{M_y^{\beta}}{J_y}$  и поперечной  $a_{71} \approx -\frac{M_x^{\beta}}{J_x}$  устойчивости. Если  $a_{81} > a_{71}$ , то колебательное движение затухает практически по истечении нескольких секунд. Остается спиральное движение с медленно нарастающей или затухающей амплитудой. Однако это движение, связанное с посту-



пательным движением центра тяжести ЛА, развивается очень медленно (при  $\chi > 0$ ), и на самолетах легко корректируется при пилотировании.

Если же  $a_{81} \ll a_{71}$ , то затухает спиральное движение, а колебательное движение, наиболее существенное в оценке бокового возмущенного движения, остается и воспринимается экипажем и пассажирами самолета наиболее тяжело. Боковое колебательное движение, будучи достаточно высокочастотным (соизмеримым с частотой продольного короткопериодического движения), затухает медленнее продольного движения.

### 3.7. Влияние статических и вращательных производных аэродинамического момента на боковую устойчивость

“Механизм” действия аэродинамических моментов в процессе свободного бокового возмущенного движения можно продемонстрировать на примере крылатого ЛА, внезапно получившего начальные возмущения (например, от порыва ветра)  $\omega_x > 0$ ,  $\gamma > 0$ . Принимаются положительными повороты и скорости в направлении  $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$ . Вращение ЛА в сторону правого крыла вызывает демпфирующий момент  $M_x^{\omega_x} \omega_x < 0$ , тормозящий накренение. Вследствие увеличения угла атаки крыла, опускающегося вниз, и уменьшения угла атаки противоположного крыла возникает момент рыскания  $M_y^{\omega_x} \omega_x < 0$ , стремящийся повернуть ЛА вправо и создающий угловую скорость  $\omega_y < 0$ . При накренении за счет составляющей силы веса по оси  $OZ_1$  ЛА начинает скольжение на правое крыло ( $\beta > 0$ ). Начавшееся скольжение вызывает в свою очередь момент  $M_x^{\beta} \beta < 0$  (действие вертикального оперения, расположенного выше центра тяжести), стремящийся уменьшить крен  $\gamma$ , и момент  $M_y^{\omega_x} \omega_x + M_y^{\beta} \beta < 0$ , стремящийся развернуть ЛА вправо (действие вертикального оперения, расположенного за центром тяжести).

Момент  $M_y^{\omega_x} \omega_x + M_y^{\beta} \beta < 0$  будет вращать ЛА вправо с угловой скоростью  $\omega_y < 0$ . Это вращение приведет к возникновению демпфирующего момента  $M_y^{\omega_y} \omega_y > 0$  и момента  $M_x^{\omega_y} \omega_y > 0$ . Последний способствует увеличению крена ЛА.

Моменты  $M_x^{\beta} \beta$  и  $M_x^{\omega_y} \omega_y$  направлены в противоположные стороны. Если  $M_x^{\beta} \beta > M_x^{\omega_y} \omega_y$ , то ЛА будет возвращаться в исходное положение без крена (горизонтальное положение), хотя при этом изменится направление его полета. Если  $M_x^{\beta} \beta < M_x^{\omega_y} \omega_y$ , то начальный крен будет увеличиваться, вес ЛА станет больше уравновешивающей его проекции подъемной силы на вертикальную плоскость и ЛА начнет снижать-

ся, разворачиваясь вправо. Это спиральное движение характеризуется пологим снижением, медленно нарастающим углом крена и угловыми скоростями вращения. Таким образом, ЛА хотя и будет обладать поперечной статической устойчивостью ( $m_x^\beta < 0$ ) и путевой статической устойчивостью ( $m_y^\beta < 0$ ), но будет спирально неустойчив. Заметим, что многие современные самолеты обладают небольшой спиральной неустойчивостью, что, отчасти, вызвано желанием улучшить управляемость.

Как уже было сказано, колебательная неустойчивость может возникнуть у ЛА, обладающего большой степенью поперечной устойчивости  $m_x^\beta$  при малом значении  $m_y^\beta$ . В этом случае скольжение ЛА после накренения вызовет большой момент  $M_x^\beta < 0$ , быстро ликвидирующий крен самолета и сообщающий ему затем крен в противоположную сторону. У такого ЛА будет наблюдаться поперечный крен с поворотами то вправо, то влево, т. е. он будет колебательно неустойчив по крену.

## 4. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ О ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

### 4.1. Летательный аппарат – объект линейной системы управления

Управление полетом ЛА заключается в выдерживании и изменении заданной траектории движения центра масс, ориентации и стабилизации положения ЛА относительно центра масс, что обеспечивается системой управления, в которой ЛА является объектом или звеном управления.

При исследовании динамических свойств ЛА как звена системы управления в качестве входных воздействий служат приращения отклонений органов управления, а выходными – приращения параметров движения ЛА ( $\Delta\psi$ ,  $\Delta\beta$ ,  $\Delta\gamma$ ,  $\Delta\omega_x$ ,  $\Delta\omega_y$ ,  $\Delta V$ ,  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\omega_z$ ,  $\Delta\theta$  и др.).

Если считать, что динамические свойства ЛА приближенно описываются линейными дифференциальными уравнениями, то введение типовых (стандартных) возмущений (ступенчатые отклонения рулей, отклонения по гармоническому закону) оправдываются принципом суперпозиции, справедливым для линейных систем.

Чтобы исследовать динамические свойства ЛА методами, разработанными в теории автоматического регулирования для линейных систем с постоянными коэффициентами, обычно используют прием “замораживания” коэффициентов: на заданной невозмущенной траектории выбирают несколько точек и вместо соответствующей системы с переменными динамическими коэффициентами  $a_{ij}(t)$  рассматривают систему с постоянными коэффициентами  $a_{ij}(t_k)$ .

При этом считают, что за время переходного процесса, начиная с момента  $t_k$ , динамические коэффициенты не успевают заметно измениться и этими изменениями можно пренебречь, если их относительная величина

$$\frac{a_{ij}(t) - a_{ij}(t_k)}{a_{ij}(t_k)}$$

не превосходит точности определения динамических коэффициентов (10–20)%.

Частным случаем управляемого движения является переходное движение или переходный процесс. Это – возмущенное движение, обусловленное, в частности, ступенчатым воздействием регулирующего фактора. В процессе переходного движения достигаются новые требуемые значения параметров движения ЛА.

#### 4.2. Понятие о передаточных коэффициентах при продольном движении

Под передаточными коэффициентами понимают отношение установившегося приращения выходной величины ( $\Delta\psi$ ,  $\Delta\beta$ ,  $\Delta\gamma$ ,  $\Delta\omega_x$ ,  $\Delta\omega_y$ ,  $\Delta V$ ,  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\omega_z$ ,  $\Delta\theta$  и др.) к приращению входной величины ( $\Delta\delta_B$ ,  $\Delta\delta_H$ ,  $\Delta\delta_3$  и др.). Чтобы управлять полетом, надо управлять нормальными силами, что достигается изменением  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Так как эти параметры практически изменяются только на короткопериодическом этапе возмущенного движения, то наибольший интерес представляет реакция ЛА на действие рулей именно на этом этапе.

В соответствии с этим при составлении приближенных уравнений короткопериодического этапа продольного возмущенного движения отбрасывают первое уравнение, описывающее изменение  $\Delta V$ , а в остальных уравнениях полагают  $\Delta V = 0$ . Кроме того, для упрощения пренебрегают влиянием на возмущенное движение силы тяжести, т. е. полагают,

что  $a_{33} = \frac{g}{V} \sin \theta = 0$ . В этом случае уравнениям короткопериодического этапа можно придать вид

$$\left. \begin{aligned} a_{12}\Delta\alpha + a_{13}\Delta\theta &= b_{11}\Delta\delta_B; \\ \frac{d(\Delta\alpha)}{dt} + a_{22}\Delta\alpha + a_{23}\Delta\theta - \Delta\omega_z &= b_{21}\Delta\delta_B; \\ \frac{d(\Delta\theta)}{dt} - a_{31}\Delta V - a_{32}\Delta\alpha &= b_{31}\Delta\delta_B; \\ \frac{d(\Delta\omega_z)}{dt} + (a_{42} - a'_{42}a_{32})\Delta\alpha - a'_{42}a_{33}\Delta\theta + \\ + (a_{44} + a'_{42})\Delta\omega_z &= (b_{41} - a'_{42}b_{31})\Delta\delta_B + b'_{41} \frac{d(\Delta\delta_B)}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Рассмотрим установившееся криволинейное движение после отклонения рулей высоты, в котором

$$\Delta \dot{\theta} = \Delta \dot{\theta}_0 = \text{const};$$

$$\Delta \delta_B = \Delta \delta_{B0} = \text{const};$$

$$\Delta \alpha = \Delta \alpha_0 = \text{const};$$

$$\Delta \omega_z = \Delta \omega_{z0} = \text{const}.$$

Тогда, опуская знак приращения, уравнениям (20) можно придать вид

$$\begin{aligned} a_{12} \left( \frac{\alpha}{\delta_B} \right)_0 + a_{13} \left( \frac{\theta}{\delta_B} \right)_0 &= b_{11}; \\ a_{22} \left( \frac{\alpha}{\delta_B} \right)_0 + a_{23} \left( \frac{\theta}{\delta_B} \right)_0 - \left( \frac{\omega_z}{\delta_B} \right)_0 &= b_{21}; \\ \left( \frac{\dot{\theta}}{\delta_B} \right)_0 - a_{32} \left( \frac{\alpha}{\delta_B} \right)_0 &= b_{31}; \\ a_{42} - a'_{42} a_{32} \left( \frac{\alpha}{\delta_B} \right)_0 - a'_{42} a_{33} \left( \frac{\theta}{\delta_B} \right)_0 + (a_{44} + a'_{42}) \left( \frac{\omega_z}{\delta_B} \right)_0 &= \\ &= b_{41} - a'_{42} b_{31}. \end{aligned}$$

В этом случае передаточные коэффициенты будут

$$\left. \begin{aligned} K_{\delta_B}^{\dot{\theta}} &= \left( \frac{\dot{\theta}}{\delta_B} \right)_0 = a_{32} K_{\delta_B}^{\alpha} + b_{31}; \\ K_{\delta_B}^{\alpha} &= \left( \frac{\alpha}{\delta_B} \right)_0 = \frac{\Delta \alpha}{\Delta}; \quad K_{\delta_B}^{\theta} = \left( \frac{\theta}{\delta_B} \right)_0 = \frac{\Delta \theta}{\Delta}; \quad K_{\delta_B}^{\omega_z} = \left( \frac{\omega_z}{\delta_B} \right)_0 = \frac{\Delta \omega_z}{\Delta}, \end{aligned} \right\}$$

где определители имеют значения

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{22} & a_{23} & -1 \\ a_{42} - a'_{42} a_{32} & -a'_{42} a_{33} & a_{44} + a'_{42} \end{pmatrix};$$

$$\Delta_{\alpha} = \begin{pmatrix} b_{11} & a_{13} & 0 \\ b_{21} & a_{23} & -1 \\ b_{41} - a_{42}b_{31} & -a_{42}a_{33} & a_{44} + a_{42} \end{pmatrix};$$

$$\Delta_{\theta} = \begin{pmatrix} a_{12} & b_{11} & 0 \\ a_{22} & b_{21} & -1 \\ a_{42} - a_{42}a_{32} & b_{41} - a_{42}b_{31} & a_{44} + a_{42} \end{pmatrix};$$

$$\Delta_{\omega_z} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & b_{11} \\ a_{22} & a_{23} & b_{21} \\ a_{42} - a_{42}a_{32} & -a_{42}a_{33} & b_{41} - a_{42}b_{31} \end{pmatrix}.$$

Передаточные коэффициенты характеризуют важные динамические характеристики управляемости ЛА. Так, например, коэффициент  $K_{\delta_b}^{\theta}$  устанавливает связь между отклонением рулей высоты и угловой скоростью изменения направления полета. Чем больше  $K_{\delta_b}^{\theta}$ , тем выше свойства управляемости ЛА. Передаточный коэффициент  $K_{\delta_b}^{\alpha}$  характеризует эффективность руля высоты – его способность изменять угол атаки. Приближенный анализ выражения для  $K_{\delta_b}^{\alpha}$  показывает, что с возрастанием степени статической устойчивости  $m_z^{\alpha}$  эффективность руля высоты уменьшается, что соответствует известному противоречию между повышением устойчивости движения и маневренностью.

#### 4.3. Понятие о передаточных функциях по тангажу

Передаточной функцией линейного звена системы управления называется отношение изображения Лапласа (операторного изображения) текущего значения выходной величины к такому же изображению входной при нулевых начальных условиях  $\Delta\alpha(t_0) = \Delta\theta(t_0) = \Delta\omega_z(t_0) = 0$ .

Переходя к операторному изображению, формально достаточно заменить в уравнениях короткопериодического движения оператор дифференцирования новым обозначением, имеющим вид параметра  $p$

$$\frac{d\alpha}{dt} = p\alpha; \quad \frac{d\theta}{dt} = p\theta; \quad \frac{d\omega_z}{dt} = p\omega_z.$$

В соответствии с этим можно написать

$$\left. \begin{aligned} (p + a_{22})\Delta\alpha + a_{23}\Delta\theta - \Delta\omega_z &= b_{21}\Delta\delta_B(p); \\ -a_{32}\Delta\alpha + (p - a_{33})\Delta\theta &= b_{31}\Delta\delta_B(p); \\ (a_{42} - a'_{42}a_{32})\Delta\alpha - a'_{42}a_{33}\Delta\theta + (p + a_{44} + a'_{42})\Delta\omega_z &= \\ &= (b_{41} - a'_{42}b_{31} + b'_{41}p)\Delta\delta_B(p), \end{aligned} \right\}$$

ИЛИ

$$\left. \begin{aligned} (p + a_{22})W_{\delta_B}^\alpha(p) + a_{23}W_{\delta_B}^\theta(p) - W_{\delta_B}^{\omega_z}(p) &= b_{21}; \\ -a_{32}W_{\delta_B}^\alpha(p) + (p - a_{33})W_{\delta_B}^\theta(p) &= b_{31}; \\ (a_{42} - a'_{42}a_{32})W_{\delta_B}^\alpha(p) - a'_{42}a_{33}W_{\delta_B}^\theta(p) + (p + a_{44} + a'_{42})W_{\delta_B}^{\omega_z}(p) &= \\ &= -(b_{41} - a'_{42}b_{31} + b'_{41}p), \end{aligned} \right\}$$

где  $W_{\delta_B}^\alpha(p) = \frac{\alpha(p)}{\delta_B(p)} = \frac{\Delta_\alpha(p)}{\Delta(p)}$ ;  $W_{\delta_B}^\theta(p) = \frac{\theta(p)}{\delta_B(p)} = \frac{\Delta_\theta(p)}{\Delta(p)}$ ;

$W_{\delta_B}^{\omega_z}(p) = \frac{\omega_z(p)}{\delta_B(p)} = \frac{\Delta_{\omega_z}(p)}{\Delta(p)}$  — передаточные функции. При этом

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} p + a_{22} & a_{23} & -1 \\ -a_{32} & p + a_{33} & 0 \\ a_{42} - a'_{42}a_{32} & -a'_{42}a_{33} & p + a_{44} + a'_{42} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_\alpha(p) = \begin{vmatrix} b_{21} & a_{23} & -1 \\ b_{31} & p + a_{33} & 0 \\ b_{41} - a'_{42}b_{31} + b'_{41}p & -a'_{42}a_{33} & p + a_{44} + a'_{42} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_\theta(p) = \begin{vmatrix} p + a_{22} & b_{21} & -1 \\ -a_{32} & b_{31} & 0 \\ a_{42} - a'_{42}a_{32} & b_{41} - a'_{42}b_{31} + b'_{41}p & p + a_{44} + a'_{42} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_{\omega_z}(p) = \begin{vmatrix} p + a_{22} & a_{23} & b_{21} \\ -a_{32} & p + a_{33} & b_{31} \\ a_{42} - a'_{42}a_{32} & -a'_{42}a_{33} & b_{41} - a'_{42}b_{31} + b'_{41}p \end{vmatrix}.$$

Если нормальная сила органов управления пренебрежимо мала по сравнению с нормальной силой крыла в ЛА, то положив  $a_{23} = a_{33} = \frac{g \sin \theta}{V} = 0$ ,  $b_{31} = \frac{c_y^{\delta_b} Q b_A}{mV} = 0$ ,  $b'_{41} = \frac{m_z^{\delta_b} Q b_A}{J} = 0$  передаточные функции будут

$$\Delta_\alpha(p) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & p & 0 \\ b_{41} & 0 & p + a_{44} + a'_{42} \end{vmatrix} = b_{41} p;$$

$$\Delta_\theta(p) = \begin{vmatrix} p + a_{22} & 0 & -1 \\ -a_{32} & 0 & 0 \\ a_{42} - a'_{42} a_{32} & b_{41} & p + a_{44} + a'_{42} \end{vmatrix} = a_{32} b_{41};$$

$$\begin{aligned} \Delta(p) &= \begin{vmatrix} p + a_{22} & 0 & -1 \\ -a_{32} & p & 0 \\ a_{42} - a'_{42} a_{32} & 0 & p + a_{44} + a'_{42} \end{vmatrix} = \\ &= p \left[ (p + a_{22})(p + a_{44} + a'_{42}) + a_{42} - a'_{42} a_{32} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, по отношению к углу атаки ЛА является звеном второго порядка, передаточную функцию которого можно записать

$$\begin{aligned} W_{\delta_b}^\alpha(p) &= \frac{\alpha(p)}{\delta_b(p)} = \frac{\Delta_\alpha(p)}{\Delta(p)} = \\ &= \frac{b_{41}}{(p + a_{22})(p + a_{44} + a'_{42}) + a_{42} - a'_{42} a_{32}}; \end{aligned}$$

$$W_{\delta_b}^\alpha(p) = \frac{K_\delta^\alpha}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}, \quad (21)$$

$$\text{где } K_\delta^\alpha = \frac{b_{41}}{a_{22}(a_{44} + a'_{42}) + a_{42} - a'_{42} a_{32}};$$

$$T = \sqrt{\frac{1}{a_{22}(a_{44} + a'_{42}) + a_{42} - a'_{42} a_{32}}}; \quad \xi = \frac{a_{22} + a_{44} + a'_{42}}{2\sqrt{a_{22}(a_{44} + a'_{42}) + a_{42} - a'_{42} a_{32}}}.$$



Величина  $T$  называется постоянной времени и характеризует период затухающих колебаний, а  $\xi$  называется коэффициентом демпфирования и характеризует скорость затухания колебаний.

#### 4.4. Переходные процессы при ступенчатом отклонении органов управления

Пусть переход ЛА от одного режима полета к другому происходит в результате ступенчатого отклонения органов управления. Если бы ЛА не обладал инерцией, то этот переход происходил бы мгновенно. В действительности же, благодаря инерционности ЛА, параметры  $\alpha, \dot{\theta}, \omega_z$  изменяются в течение некоторого промежутка времени. Этот процесс называется переходным. По его окончании устанавливаются новые значения параметров полета, соответствующие новому положению органов управления. Дифференциальное уравнение, соответствующее передаточной функции (21), будет

$$(T^2 p^2 + 2\xi Tp + 1)\alpha = K_\delta^\alpha \delta_B,$$

где  $p = \frac{d}{dt}$ .

Так как управляющее воздействие принимается постоянным ( $\delta_B = \delta_0 = \text{const}$ ), частное решение уравнения для угла атаки будет  $\alpha = K_\delta^\alpha \delta_B$ .

Общее решение однородного уравнения определяется корнями характеристического уравнения  $T^2 p^2 + 2\xi Tp + 1 = 0$ , равными

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}}{T}.$$

Если корни различны ( $\xi \neq 1$ ), общее решение будет

$$\alpha = C_1' e^{\lambda_1 t} + C_2' e^{\lambda_2 t} + K_\delta^\alpha \delta_0$$

или

$$\frac{\alpha}{\delta_0} = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + K_\delta^\alpha \quad \text{и} \quad \frac{\dot{\alpha}}{\delta_0} = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (22)$$

Отсюда, учитывая, что при  $t = 0$   $\alpha = 0$  и  $\dot{\alpha} = 0$ , для определения  $C_1$  и  $C_2$  можно составить систему уравнений

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + K_8^\alpha &= 0; \\ C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 &= 0, \end{aligned}$$

откуда  $C_1 = K_8^\alpha \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$ ;  $C_2 = -K_8^\alpha \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$ .

Обычным для ЛА является колебательный переходный процесс, который имеет место при  $\xi < 1$ . В этом случае

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{T} \left( -\xi \pm \sqrt{1 - \xi^2} \right) = -\frac{\xi}{T} \pm i\omega,$$

где  $\omega = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T}$ .

Используя эти значения корней, можно получить

$$C_1 = K_8^\alpha \frac{-\frac{\xi}{T} - i\omega}{2i\omega}; \quad C_2 = K_8^\alpha \frac{\frac{\xi}{T} - i\omega}{2i\omega}.$$

Подставляя эти результаты в (22) для переходного процесса, можно получить

$$\frac{\alpha}{K_8^\alpha \delta_B} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\frac{\xi t}{T}} (\omega T \cos \omega t + \xi \sin \omega t).$$

Полагая  $\omega T = \sqrt{1 - \xi^2} = \cos \varphi_1$ ,  $\xi = \sin \varphi_1$ , можно получить

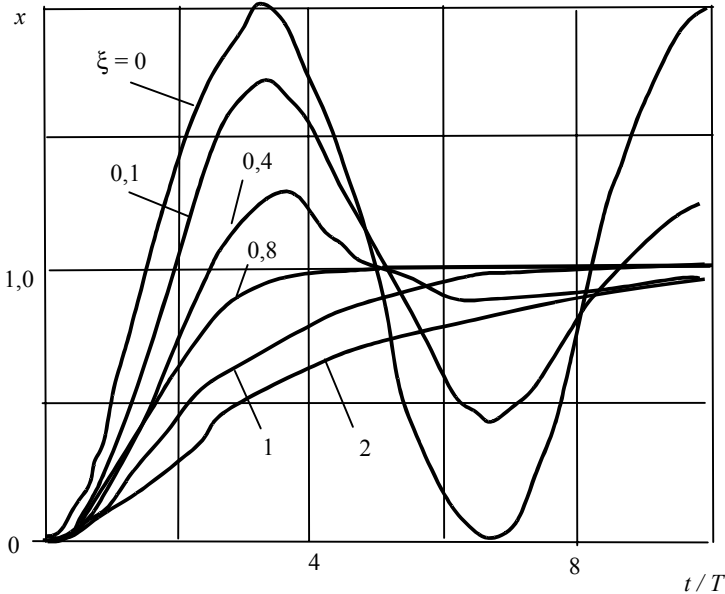
$$\frac{\alpha}{K_8^\alpha \delta_B} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\frac{\xi t}{T}} \cos \left( \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T} t - \varphi_1 \right).$$

Вещественная часть пары сопряженных корней характеристического уравнения при  $\xi < 1$  оказывается отрицательной, так как обычно  $c_y^\alpha > 0$ ,  $m_z^{\omega z} < 0$  и  $m_z^{\dot{\alpha}} < 0$

$$-\frac{\xi}{T} = -\frac{a_{22} + a_{44} + a'_{42}}{2} = -\frac{1}{2} \left( \frac{P_* + c_y^\alpha Q}{mV} - \frac{(m_z^{\omega z} + m_z^{\dot{\alpha}}) Q b_A}{J_z} \right) < 0.$$

Поэтому рассматриваемый колебательный переходный процесс ЛА оказывается всегда затухающим.

Чем больше коэффициент демпфирования  $\xi$ , тем быстрее затухают свободные колебания (рис. 10).



**Рис. 10. Переходные процессы по углу атаки при ступенчатом отклонении руля высоты**

Угловая частота свободных колебаний (при наличии демпфирования) определяется выражением

$$\omega = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} = \sqrt{a_{22}(a_{44} + a'_{42}) + a_{42} - a'_{42}a_{32} - \frac{1}{4}(a_{22} + a_{44} - a'_{42}a_{32})}.$$

На величину  $\omega$  влияет, главным образом, коэффициент статической устойчивости  $a_{42} = -\frac{m_z^\alpha Q b_A}{J_z} > 0$  – с его увеличением частота колебаний возрастает.

При отсутствии демпфирования ( $\xi = 0$ ) угловая частота колебаний в переходном процессе называется собственной угловой частотой колебаний.

Соответственно, период собственных колебаний определяется

$$T_c = \frac{2\pi}{\omega_c} = 2\pi T.$$

Собственная частота является важной динамической характеристикой ЛА. Как следует из формулы

$$\omega_c = \sqrt{a_{22}(a_{44} + a'_{42}) + a_{42} - a'_{42}a_{32}},$$

где  $\omega_c$ , как и постоянная времени  $T$ , зависит от момента инерции, степени статической устойчивости и скоростного напора. С изменением скорости и высоты полета, а также центровки ЛА, собственная частота может изменяться в несколько раз.

Свойства динамической управляемости ЛА могут быть оценены способностью быстро и без заметных колебаний отвечать на управляющее воздействие, т. е. следовать за изменением положения органов управления. Оценка этого свойства ЛА может быть проведена по времени запаздывания реакции ЛА на управляющее воздействие и по абсолютной величине изменения параметров полета.

Время переходного процесса показывает запаздывание реакции ЛА на отклонение, например руля высоты.

Из рис. 10 следует, что наиболее короткий (в безразмерном времени) переходный процесс получается при  $\xi \approx 0,8$ . В этом случае его длительность равна  $t_p \approx 3T = 3/\omega_c$ .

Уменьшение коэффициента относительного демпфирования сопровождается увеличением заброса параметров движения. Под забросом понимают увеличение параметра движения по сравнению с его установившимся значением.

Максимальное значение заброса в переходном процессе будет достигнуто в момент времени  $t = \frac{\pi}{\omega}$ , определяемый условием  $\dot{\alpha} = 0$ , т. е. через половину периода после начала переходного процесса и будет

$$\alpha_{\max} = \alpha_{\text{уст}} \left( 1 + e^{-\frac{\xi\pi}{T\omega}} \right).$$

Относительный заброс будет

$$\sigma = \frac{\alpha_{\max} - \alpha_{\text{уст}}}{\alpha_{\text{уст}}} = e^{-\frac{\xi\pi}{T\omega}} = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}.$$

Видно, что относительный заброс  $\sigma$  при ступенчатом отклонении органов управления зависит только от относительного коэффициента демпфирования.

При наличии значительного заброса по углу атаки ощущается колебательное движение в виде резкого изменения действующих перегрузок. Так как современные скоростные ЛА могут совершать маневры при больших  $\alpha$ , то это может привести к сваливанию в штопор. Это обстоятельство требует постановки на ЛА противоштопорной системы. Большие углы атаки, большие углы крена приводят к появлению инерционных нелинейных связей. В результате самолет становится неустойчивым. Например, потеря устойчивости для некоторых самолетов проявляется при  $\alpha \approx 30$  град.

Улучшить динамические характеристики ЛА можно с помощью современных систем автоматического управления, построенных с учетом нелинейных взаимосвязей между параметрами бокового и продольного движения.

## Библиографический список

1. *Снешко Ю. И.* Устойчивость и управляемость самолета в эксплуатационной области режимов полета: Справочник. М.: Машиностроение, 1987. 136 с.

2. *Боргест Н. М., Данилин А. И., Комаров В. А.* Краткий словарь авиационных терминов. М.: Изд-во МАИ, 1992. 224 с.

3. *Остославский И. В., Стражева И. В.* Динамика полета. М.: Машиностроение, 1969. Т. 1. 500 с.

4. *Богословский С. В.* Теория и практика аэромагнитного моделирования/ СПбГУАП. СПб., 1998. 140 с.

## Оглавление

Предисловие .....	3
1. Описание динамики полета с помощью дифференциальных уравнений .....	5
2. Статическая устойчивость и статическая управляемость летательного аппарата .....	11
2.1. Аэродинамические силы и моменты, действующие на летательный аппарат в полете .....	11
2.2. Продольное движение летательного аппарата .....	13
2.3. Продольная статическая устойчивость летательного аппарата .....	19
2.4. Боковое движение .....	25
2.5. Боковая статическая устойчивость летательного аппарата ...	28
2.6. Понятие о боковой статической управляемости, боковая балансировка летательного аппарата, балансировочная диаграмма по отклонению рулей .....	30
3. Основные сведения об устойчивости движения летательных аппаратов .....	34
3.1. Свойство устойчивости движения летательных аппаратов ..	34
3.2. Линеаризация уравнений движения .....	35
3.3. Разделение возмущенного движения на продольное и боковое .....	39
3.4. Критерии динамической устойчивости .....	42
3.5. Короткопериодическое (быстропротекающее) и длиннопериодическое продольные возмущенные движения	45
3.6. Понятие о характере бокового возмущенного движения .....	47
3.7. Влияние статических и вращательных производных аэродинамического момента на боковую устойчивость .....	49
4. Основные понятия о динамических характеристиках управляемости летательных аппаратов .....	51
4.1. Летательный аппарат – объект линейной системы управления .....	51
4.2. Понятие о передаточных коэффициентах при продольном движении .....	52
4.3. Понятие о передаточных функциях по тангажу .....	54
4.4. Переходные процессы при ступенчатом отклонении органов управления .....	57
Библиографический список .....	62
	63

Учебное издание

**Богословский Сергей Владимирович**  
**Дорофеев Александр Дмитриевич**

**ДИНАМИКА ПОЛЕТА**  
**ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ**

Учебное пособие

Редактор *А. В. Семенчук*  
Компьютерная верстка *А. Н. Колешко*

---

Сдано в набор 02.09.02. Подписано к печати 24.12.02. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 3,72. Усл. кр.-отг. 4,13. Уч. -изд. л. 4,0. Тираж 150 экз. Заказ №

---

Редакционно-издательский отдел  
Отдел электронных публикаций и библиографии библиотеки  
Отдел оперативной полиграфии  
СПбГУАП

190000, Санкт-Петербург, ул. Б. Морская, 67